Université Paul Sabatier | S4, Année 2015-2016

L2 Spécial, Analyse Complexe

TD 7. Intégrales avec les résidus

Exercice 1. Soit
$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}.$$

(1) Déterminer les singularités de f et calculer les résidus en ces points.

(2) Soit $\gamma_\varepsilon : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin $\gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{it}$. Montrer que
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = \pi i.$$

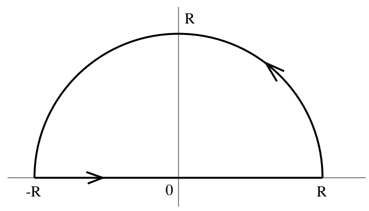
(3) Soit $0 < \varepsilon < 1 < R$. Représenter le lacet Γ formé de la suite de chemins suivants :
- $\gamma_1(t) = t$ pour $t \in [\varepsilon, R]$
- $\gamma_2(t) = Re^{\pi i t}$ pour $t \in [0,1]$
- $\gamma_3(t) = t$ pour $t \in [-R, -\varepsilon]$
- $\gamma_4(t) = \varepsilon e^{\pi i(1-t)}$ pour $t \in [0,1]$.

(4) Calculer
$$\int_\Gamma f(z)dz.$$

(5) Montrer que
$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0.$$

(6) En déduire la valeur de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Exercice 2. Considérons le contour suivant ($R > 0$) :



a) On fixe $a \in \mathbb{R}^+$. Calculer l'intégrale de
$$z \longmapsto \frac{e^{iaz}}{1+z^2}$$
sur ce circuit. En faisant tendre R vers $+\infty$, déduire
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx.$$

b) En intégrant $ze^{iz}/(1+z^2)$ sur le même contour, calculer
$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx.$$

Exercice 3. Calculer l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{4+x^2}\,dx,$$
avec $a > 0$.

Exercice 4. Calculer l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+x+1}\,dx.$$

Exercice 5. Soit $a \in \mathbb{R}$, tel que $a > 1$.

(1) Calculer l'intégrale
$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{az^2-(1+a^2)z+a}\,dz,$$
où le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique.

(2) Calculer
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2a\cos(t)-(1+a^2)}.$$