

## TD 5. Zéros de fonctions holomorphes

**Exercice 1.** Soit  $f(z) = \sin\left(\frac{1}{e^z + e}\right)$ .

- (1) Quel est le plus grand ouvert  $U$  sur lequel  $f$  est holomorphe ?
- (2) Trouver les zéros de  $f$ .
- (3) Montrer que cet ensemble possède un point d'accumulation dans  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 2.** Soit  $f$  une fonction entière telle que  $|f(z)| \rightarrow +\infty$  quand  $|z| \rightarrow +\infty$ . Montrer que  $f$  n'a qu'un nombre fini de zéros.

**Exercice 3.** Soit  $f(z) = \sin\frac{\pi}{1-z}$ . Montrer que  $f$  est analytique sur le disque ouvert  $|z| < 1$ . Quels sont les zéros de  $f$  sur ce disque ? Est-ce contradictoire avec le principe des zéros isolés ?

**Exercice 4.** Soit  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $a_n \in \mathbb{C}$ , une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ .

- (1) Montrer que, pour tout  $0 \leq r < R$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

- (2) En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq M(r)^2,$$

où  $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ , et que pour tout  $n \geq 0$ , on a l'inégalité de Cauchy  $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$ .

- (3) On suppose que  $R = +\infty$  et qu'il existe un entier  $k \geq 0$  et des constantes  $c \geq 0$ ,  $r_0 \geq 0$  tels que  $M(r) \leq cr^k$  pour tout  $r \geq r_0$ . Montrer que  $f$  est un polynôme de degré  $\leq k$ .

**Exercice 5.** Soit  $f$  une fonction continue sur le disque fermé  $\overline{D}(0, 1)$ , analytique sur le disque ouvert  $D(0, 1)$  et nulle sur le demi-cercle  $\text{Im}(z) \geq 0$ . Montrer que  $f$  est nulle. *Indication : on pourra considérer  $g(z) = f(z)f(-z)$ .*

**Exercice 6.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions entières, c'est-à-dire développables en séries entières sur  $\mathbb{C}$  entier. On suppose que

$$|f(z)| \leq |g(z)| \text{ pour tout } z.$$

Quelle conclusion peut-on en tirer ?

**Exercice 7 (\*)**. Soit  $(\lambda_k)_{k \geq 0}$  une suite de nombres complexes.

- (1) Montrer que s'il existe une fonction entière non identiquement nulle dont les zéros sont exactement les  $\lambda_k$  comptés avec multiplicité, alors il faut nécessairement que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_k| = +\infty$ .
- (2) Montrer que si  $f$  est entière et non constante sur  $\mathbb{C}$ , alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $f^{-1}(\lambda)$  est au plus dénombrable.
- (3) Donner des exemples de fonctions entières ayant aucun, un nombre fini, ou une infinité de 0 sur  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 8 (\*)**. On définit les opérateurs différentiels  $\partial = \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$  et  $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$ .

- (1) Calculer  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z^k \bar{z}^m)$  pour  $k, m \in \mathbb{N}$ . En déduire qu'un polynôme des deux variables réelles  $x$  et  $y$  à coefficients complexes  $P(x, y) = \sum_{k, m=0}^N \beta_{k, m} x^k y^m$  définit une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$  si, et seulement si, il s'écrit sous la forme  $P(x + iy) = \sum_n a_n (x + iy)^n$ , où les  $a_n$  sont des nombres complexes (que l'on ne demande pas de calculer en fonction des  $\beta_{k, m}$ ).
- (2) Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  (au sens réel) sur un ouvert  $D$  de  $\mathbb{C}$ . Montrer que

$$4\partial\bar{\partial}f = \Delta f \text{ sur } D,$$

où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien. En déduire que si  $f$  est holomorphe sur  $D$ , alors

$$\Delta \operatorname{Re} f \equiv \Delta \operatorname{Im} f \equiv 0 \text{ sur } D.$$

- (3) Soient  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{C}$  et  $f, g \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ . Vérifier que

$$\partial\bar{\partial}(f\bar{g}) = f'\bar{g}'.$$

En déduire que si  $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{H}ol(\Omega)$  sont telles que  $|f_1|^2 + \dots + |f_n|^2$  est constante sur  $\Omega$ , alors chacune des fonctions  $f_k$  doit être constante sur  $\Omega$ .