Université Paul Sabatier | S4, Année 2015-2016
L2 Spécial, Analyse Complexe

TD 4. Formules de Cauchy

Exercice 1. Soient $D = B(0,1)$, $r \in]0,1[$, $M \in \mathbb{R}_+$ et $f \in O(D)$. On suppose que $f(0) = a_0 \neq 0$, qu'il existe $z_0 \in B(0,r)$ tel que $f(z_0) = 0$, et que $|f(z)| \leq M$ si $|z| = r$. Montrer, à l'aide de la formule de Cauchy, que $|a_0|r \leq |z_0|(M + |a_0|)$.

Exercice 2. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert contenant le disque fermé $\overline{D(0,R)}$. On note $M = \max_{|z|=R} |f(z)|$.

(1) Soit $0 < \rho < 1$. Montrer que si $|z| < \rho R$ alors $|f(z) - f(0)| < M\frac{\rho}{1-\rho}$.

(2) En déduire que si $f(0) \neq 0$ alors $f(z) \neq 0$ pour tout z tel que $|z| < \frac{|f(0)|R}{|f(0)|+M}$.

Exercice 3. Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

(1) Montrer que, pour tout $0 \leq r < R$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

(2) En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq M(r)^2,$$

où $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, et que pour tout $n \geq 0$, on a l'inégalité de Cauchy $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$.

(3) On suppose que $R = +\infty$ et qu'il existe un entier $k \geq 0$ et des constantes $c \geq 0$, $r_0 \geq 0$ tels que $M(r) \leq cr^k$ pour tout $r \geq r_0$. Montrer que f est un polynôme de degré $\leq k$.

Exercice 4. Soit $f = \sum a_n z^n$ une fonction holomorphe dans le disque unité telle que $|f(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)}$ pour tout $|z| < 1$. Montrer que

$$|a_n| \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1) < (n+1)e.$$

Exercice 5. Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert contenant $\overline{D(0,1)}$ et f une fonction holomorphe dans U. Pour $t \in [0, 2\pi]$, on pose $\gamma(t) = e^{it}$.

(1) Calculer les intégrales :

$$I_1 = \int_\gamma \left[2 + z + \frac{1}{z}\right] \frac{f(z)}{z} dz, \quad I_2 = \int_\gamma \left[2 - z - \frac{1}{z}\right] \frac{f(z)}{z} dz.$$

(2) En déduire la valeur de :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2 \frac{t}{2} dt, \quad \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \sin^2 \frac{t}{2} dt.$$

(3) Pour $|a| \neq 1$, évaluer :

$$I(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{f(z)}}{z - a} dz.$$