Université Paul Sabatier
L2 Spécial, Analyse Complexe

S4, Année 2015-2016

TD 3. Intégrales curvilignes, Formule de Cauchy

Exercice 1. Calculer l'intégrale des fonctions $f(z) = z^2$, $g(z) = \frac{1}{z}$ et $h(z) = \cos z$ sur le chemin (orienté dans le sens trigonométrique)

$$\Gamma = [\pi/2, \pi/2 + i] \cup [\pi/2 + i, -\pi/2 + i] \cup [-\pi/2 + i, -\pi/2].$$

Exercice 2. Calculer l'intégrale de $(\sin z)^2$ le long du chemin $\gamma(t) = t + it^2$, $t \in [0, 1]$.

Exercice 3. Calculer les intégrales curvilignes de $(\sin z)^2$ le long des courbes suivantes: $\{|z| = 1, \mathrm{Re}\, z \geq 0\}$, $\{|z| = 1, \mathrm{Re}\, z \leq 0\}$, $\{|z| \leq 1, \mathrm{Re}\, z = 0\}$.

Exercice 4. Calculer les intégrales curvilignes de $z - \frac{1}{z}$ le long des trois courbes joignant les points $1 - i$ et $1 + i$ en ligne droite ou au long du cercle centré en 0. Comparer les résultats et donner une explication.

Exercice 5. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. On pose $\gamma(t) = a\cos(t) + ib\sin(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Calculer :

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z} \quad et \quad J = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}.$$

Montrer donc l'égalité suivante

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)} = 2\pi/ab.$$

Exercice 6. Soient $I = [0, 1]$, $\gamma : I \to \mathbb{C}$ de classe C^1 et $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ une application continue. Si $t \in I$, on pose $\chi(t) = \overline{\gamma(t)}$.

(1) Établir :

$$\overline{\int_\gamma f(z)\, dz} = \int_\chi \overline{f(\overline{z})} dz.$$

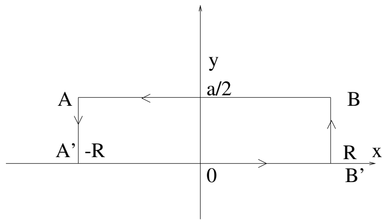
(2) On suppose que $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$. Montrer que:

$$\overline{\int_\gamma f(z)\, dz} = -\int_\gamma \overline{f(z)} \frac{dz}{z^2}.$$

Exercice 7 $(*)$**.** Pour $n \in \mathbf{N}$, calculer $\displaystyle\int_\gamma \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}$ pour $\gamma = \mathbf{S}^1$. En déduire la valeur des "intégrales de Wallis" $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^n(t)dt$.

Exercice 8 $(*)$**.** Calculer $\int_\gamma (z - a)^n\, dz$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, où $\gamma(t) = a + \exp(it)$ et $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 9. Appliquer le théorème de Cauchy à la fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ et au contour rectangulaire ci-après (a est un réel strictement positif).



Montrer que $\int_{\overrightarrow{AA'}} e^{-z^2} dz$ et $\int_{\overrightarrow{BB'}} e^{-z^2} dz$ tendent vers 0 quand R tend vers $+\infty$, et en déduire la valeur de
$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos ax\, dx.$$
(On admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice 10. Soient $D = B(0,1)$, $r \in]0,1[$, $M \in \mathbb{R}_+$ et $f \in O(D)$. On suppose que $f(0) = a_0 \neq 0$, qu'il existe $z_0 \in B(0,r)$ tel que $f(z_0) = 0$, et que $|f(z)| \leq M$ si $|z| = r$. Montrer, à l'aide de la formule de Cauchy, que $|a_0| r \leq |z_0|(M + |a_0|)$.

Exercice 11. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert contenant le disque fermé $\overline{D(0,R)}$. On note $M = \max_{|z|=R} |f(z)|$.

(1) Soit $0 < \rho < 1$. Montrer que si $|z| < \rho R$ alors $|f(z) - f(0)| < M \frac{\rho}{1-\rho}$.

(2) En déduire que si $f(0) \neq 0$ alors $f(z) \neq 0$ pour tout z tel que $|z| < \frac{|f(0)|R}{|f(0)|+M}$.

Exercice 12. Soit $f = \sum a_n z^n$ une fonction holomorphe dans le disque unité telle que $|f(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)}$ pour tout $|z| < 1$. Montrer que
$$|a_n| \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1) < (n+1)e.$$

Exercice 13. Soit U le disque unité ouvert et $f : U \to \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe continue jusqu'au bord. Montrer que pour tout $z_0 \in U$, il existe deux nombres complexes distincts $z_1, z_2 \in \partial U$ tels que $|f(z_0)| = |f(z_1)| = |f(z_2)|$.

Exercice 14 ($*$)**.** On veut montrer que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|1 - ae^{it}|dt = \sup(0, ln|a|)$. On considère $\Omega = \{z \mid \mathrm{Re}(z) < 1\}$.

(1) Montrer qu'il existe h holomorphe sur Ω telle que $e^{h(z)} = 1 - z$ et $h(0) = 0$.

(2) Soit $0 < \delta < \pi$. Exprimer $I(\delta) = \mathrm{Re}\left[\displaystyle\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{h(z)}{z} dz\right]$, où $\Gamma(t) = e^{it}$ et $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$, en fonction d'une intégrale de $\ln|1 - e^{it}|$.

(3) Montrer que $I(\delta) = \mathrm{Re}\left[\displaystyle\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{h(z)}{z} dz\right]$ où γ est l'arc de cercle de centre 1 joignant $e^{i\delta}$ à $e^{-i\delta}$ en restant dans Ω.

(4) Déduire le résultat en montrant que $I(\delta)$ tend vers 0 avec δ.

(5) Montrer par la même méthode ((1) et (2) avec $\delta = 0$ suffisent) que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|1 - ae^{it}|dt = 0$ pour $|a| < 1$.

(6) En déduire que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|1 - ae^{it}|dt = \ln|a|$ pour $|a| > 1$.