Université Paul Sabatier S4, Année 2015-2016
L2 Spécial, Analyse Complexe

TD 1. Séries entières

Exercice 1. (1) Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} z^n$?
(2) Calculer la somme pour z dans le disque ouvert $D(0,R)$.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ où :

$$(1)\ a_n = n^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}; \quad (2)\ a_n = n!; \quad (3)\ a_n = \begin{cases} \frac{(-2)^n}{n+1} & \text{si } n = 3m+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(4)\ a_n = \frac{n^\alpha}{n!}, \alpha > 0; \quad (5)\ a_n = \frac{1+a^n}{n}, a > 0.$$

Exercice 3. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence R' de la série $\sum b_n z^n$ dans les cas suivants :

(1) $b_n = a_n^2$ (2) $b_n = a_n f(n)$, où $f \not\equiv 0$ est une fraction rationnelle.

(3) $b_{2n} = a_n$ et $b_{2n+1} = 0$ (4) $b_n = \dfrac{a_n}{n!}$

Exercice 4. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n$ admet le même rayon de convergence.

Exercice 5. Montrer que la fonction définie par la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ est injective sur le disque $D(0,2/3)$. *Indication* : Remarquer que pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,

$$z^n - w^n = (z-w)(z^{n-1} + z^{n-2}w + \cdots + zw^{n-2} + w^{n-1}).$$

Exercice 6. Développement limité des fonctions réelles $e^x, \cos x, \sin x$ et $\log(1-x)$. Calculer le rayon de convergence des séries entières associées.

Exercice 7 $(*)$**.** Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-1/x^2}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 8 $(*)$**.** (Sommation d'Abel) Soient (u_n), (v_n) des suites de nombres complexes. On pose $S_k^m = v_k + \ldots + v_m$.

(1) Montrer que pour $m < n$, on a

$$\sum_{k=m}^{n} u_k v_k = u_m S_m^n + \sum_{k=m+1}^{n} (u_k - u_{k-1}) S_k^n.$$

(2) Si de plus (u_n) est réelle et décroissante vers 0, et que la suite des sommes partielles $\sum_1^k v_n$ est bornée, en déduire que la série de terme général $u_n . v_n$ est convergente.

Exercice 9 $(*)$**.** Calculer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$$

et montrer que la série converge pour tout z tel que $z \neq \frac{1}{4}$ et $|z| = \frac{1}{4}$.