Rappels élémentaires de Topologie

Ouverts / Fermés.

Définition: On appelle <u>espace topologique</u> $(E, \mathcal{O})$ toute couple constitué d'un ensemble E et d'un ensemble $\mathcal{O}$ de parties de E, appelés <u>ouverts</u>, vérifiant les 3 axiomes suivants:

(1) $\emptyset \in \mathcal{O}$ et $E \in \mathcal{O}$

(2) $\forall \Omega_i \in \mathcal{O}, \bigcup_{i\in I} \Omega_i \in \mathcal{O}$ (I = ensemble quelconque d'indices)

(3) si $\Omega_1 \in \mathcal{O}$ et $\Omega_2 \in \mathcal{O}$, alors

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 \in \mathcal{O}.$$

Une partie $F \subset E$ de E sera dite <u>Fermé</u> ssi son complémentaire $E \setminus F$ est un ouvert.

Exemples:

(*) $(E, \mathcal{P}(E))$ est un esp. topologique, où $\mathcal{P}(E)$ = l'ensemble de toutes les parties de E.

(*) $(E, \{\emptyset, E\})$ est un esp. topologique (<u>Topologie triviale</u>)

Définition: Soit $(E, \mathcal{O})$ un esp. topologique et soit $A \subset E$ un sous-ensemble.

L'<u>adhérence de A</u>, $\bar{A}$, est le plus petit ensemble fermé de E contenant A ($\bar{A} \supset A$). [Exo: A est fermé ssi $\bar{A} = A$]

L'<u>intérieur de A</u>, $\mathring{A}$, est le plus grand ouvert contenu dans A, ($\mathring{A} \subset A$). [Exo: A est ouvert ssi $\mathring{A} = A$]

La <u>frontière (ou bord) de A</u> est $\partial A \doteq \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

Topologie Métrique :

Soit (E,d) un espace métrique, c'est-à-dire, E un ensemble et $d : E\times E \to \mathbb{R}_+$ une distance

[exo : écrire les propriétés nécessaires pour que d soit une distance.]

Déf / Notations :

Soit $a\in E$ et soit $r\in\mathbb{R}_+$.

Le disque ouvert de centre a et rayon r est :

$D(a,r) = \{x\in E : d(a,x) < r\}$.

Le disque fermé de centre a et rayon r est

$\overline{D(a,r)} = \{x\in E : d(a,x)\leq r\}$.

Le cerle de centre a et rayon r est

$\mathcal{C}(a,r) = \{x\in E : d(a,x) = r\} = \overline{D(a,r)}\setminus D(a,r) = \partial D(a,r)$.

On a donc, par exemples que :

pour $\mathbb{R}$ avec $d(x,y) = |x-y|$

$D(a,r) =]a-r, a+r[$

$\overline{D(a,r)} = [a-r, a+r]$

pour $\mathbb{R}^2$ avec la distance euclidienne $d(\underline{x},\underline{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$:

$D(a,r) =$  disque "usuel" sans bord

$\overline{D(a,r)} = D(a,r)\cup \mathcal{C}(a,r)$ disque "usuel" avec bord.

et de même pour $\mathbb{C}$ avec la distance euclidienne :

si $z = x+iy$ et $w = u+iv$: $d(z,w) = \sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$.

Déf : Soit (E,d) un esp. métrique. On dit que $A\subset E$ est borné ssi $\exists r>0\ \exists a\in E$ t.q. $A\subset D(a,r)$.

<u>Déf</u>: Soit (E, d) un esp. métrique. On dit que
$\Omega \subset E$ est <u>ouvert</u> ssi :
ou bien $\Omega = \phi$,
ou bien $\Omega \neq \phi$ et $\forall a \in \Omega \ \exists r > 0$ tq. $D(a,r) \subset \Omega$.

La topologie ainsi définie s'appele <u>topologie métrique</u>.

<u>Déf</u>. Soit $A \subset \mathbb{R}$, ou $A \subset \mathbb{R}^2$, ou $A \subset \mathbb{C}$.
On dit que A est <u>compact</u> ssi A est fermé et borné.

<u>Déf</u>: Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ ou $A \subset \mathbb{C}$. On dit que A est
<u>connexe</u> ssi il est <u>connexe par arc</u>, c'est-à-dire
" $\forall x, y \in A$ $\exists$ un arc continue connectant x à y "
dans A.