UNIVERSITE PAUL SABATIER 2014–2015

Analyse Complexe - L2 Spécial

CONTRÔLE CONTINU DU 13 MARS 2015, DURÉE 2 H

Exercice I

1. Déterminer le centre et le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{1}{4^n}(z+1-3i)^n$.
2. Déterminer le centre et le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{2n+5}{7n^4+n^2+6}(z+i)^n$.
3. Déterminer le centre et le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1+a^n}{n}z^n$, où a est un nombre réel strictement positif.

Exercice II

Le plan complexe $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$ par $z = x + iy$.

1. Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(z) = 4x + iy^2$. Déterminer l'ensemble U des points de $\mathbb{C}$ où f est holomorphe.
2. Déterminer si U est ouvert, fermé, ni ouvert ni fermé. (Justifier soigneusement la réponse).

Exercice III

Le plan complexe $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$ par $z = x + iy$.

1. Montrer que les seules fonctions holomorphes définies sur un ouvert connexe non vide Ω de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont les constantes.
2. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe non vide, et soient f et g deux fonctions holomorphes dans Ω telles que $f(z) + \overline{g(z)} \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in \Omega$. Prouver qu'alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $f(z) = c + g(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

Exercice IV

1. Déterminer en quels points du plan complexe la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{(z-i)(z-2-i)}$ est définie et holomorphe.
2. Déterminer $A, B \in \mathbb{C}$ tels que
$$\frac{1}{(z-i)(z-2-i)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z-2-i}.$$
3. Donner une paramétrisation γ du cercle de centre i et rayon 1 parcouru une seule fois dans le sens trigonométrique.
4. Déterminer la valeur de
$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-i)(z-2-i)}.$$