TD 2. Fonctions holomorphes

Exercice 1. Montrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et vérifie $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Exercice 2. En quels points la fonction $z \mapsto \bar{z}$ est-elle dérivable au sens complexe ? Même question pour $z \mapsto |z|^2$.

Exercice 3. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U. Les fonctions

$$z \mapsto \overline{f(z)} \text{ sur } U, \quad z \mapsto \overline{f(\bar{z})} \text{ sur } \overline{U} = \{z \mid \bar{z} \in U\} \quad \text{et} \quad z \mapsto f(\bar{z}) \text{ sur } \overline{U}$$

sont-elles holomorphes ?

Exercice 4. Existe-t-il une fonction $f = P + iQ$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que les fonctions $(x,y) \mapsto P(x,y)$ et $(x,y) \mapsto Q(x,y)$ soient de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^2$, mais f ne soit pas holomorphe dans $\mathbb{C}$?

Exercice 5. Trouver toutes les fonctions holomorphes f telles que :

(1) $\mathrm{Re}(f(z)) = C$, où C est une constante,
(2) $\mathrm{Re}(f(z)) = \frac{x}{x^2+y^2}$,
(3) $\mathrm{Re}(f(z)) = \cos x$.

Exercice 6. Soit $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

(1) Montrer que la fonction exp est définie sur $\mathbb{C}$ et continue.
(2) Montrer que la fonction exp est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et donner sa dérivée.
(3) En déduire que les fonctions suivantes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$:

$$\sin(z) := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \text{ et } \cos(z) := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}.$$

Exercice 7. Soit $\Omega := \{z \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Montrer que la fonction $L(z) := \ln|z| + i\arctan(\frac{y}{x})$ est holomorphe sur Ω.