

## TD 1. Séries entières

**Exercice 1.** (1) Quel est le rayon de convergence  $R$  de la série entière  $\sum_{n \geq 0} z^n$  ?  
(2) Calculer la somme pour  $z$  dans le disque ouvert  $D(0, R)$ .

**Exercice 2.** Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$  où :

$$(1) a_n = n^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}; \quad (2) a_n = n!; \quad (3) a_n = \begin{cases} \frac{(-2)^n}{n+1} & \text{si } n = 3m + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(4) a_n = \frac{n^\alpha}{n!}, \alpha > 0; \quad (5) a_n = \frac{1 + a^n}{n}, a > 0.$$

**Exercice 3.** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . Déterminer le rayon de convergence  $R'$  de la série  $\sum b_n z^n$  dans les cas suivants :

$$(1) b_n = a_n^2 \qquad (2) b_n = a_n f(n), \text{ où } f \neq 0 \text{ est une fraction rationnelle.}$$

$$(3) b_{2n} = a_n \text{ et } b_{2n+1} = 0 \qquad (4) b_n = \frac{a_n}{n!}$$

**Exercice 4.** Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . Montrer que la série entière  $\sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$  admet le même rayon de convergence.

**Exercice 5.** Montrer que la fonction définie par la série entière  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$  est injective sur le disque  $D(0, 2/3)$ . *Indication :* Remarquer que pour tous  $z, w \in \mathbb{C}$ ,

$$z^n - w^n = (z - w)(z^{n-1} + z^{n-2}w + \dots + zw^{n-2} + w^{n-1}).$$

**Exercice 6.** Développement limité des fonctions réelles  $e^x, \cos x, \sin x$  et  $\log(1-x)$ . Calculer le rayon de convergence des séries entières associées.

**Exercice 7 (\*).** Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = e^{-1/x^2}$  pour  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$ . Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  mais n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

**Exercice 8 (\*).** (Somme d'Abel) Soient  $(u_n), (v_n)$  des suites de nombres complexes. On pose  $S_k^m = v_k + \dots + v_m$ .

(1) Montrer que pour  $m < n$ , on a

$$\sum_{k=m}^n u_k v_k = u_m S_m^n + \sum_{k=m+1}^n (u_k - u_{k-1}) S_k^n.$$

(2) Si de plus  $(u_n)$  est réelle et décroissante vers 0, et que la suite des sommes partielles  $\sum_1^k v_n$  est bornée, en déduire que la série de terme général  $u_n \cdot v_n$  est convergente.

**Exercice 9 (\*).** Calculer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$$

et montrer que la série converge pour tout  $z$  tel que  $z \neq \frac{1}{4}$  et  $|z| = \frac{1}{4}$ .