Notions/Rappels élémentaires de topologie

Ouverts / Fermés :

Définition : On appelle espace topologique $(E, \mathcal{O})$ toute couple constitué d'un ensemble E et d'un ensemble $\mathcal{O}$ de parties de E, appelés ouverts, vérifiant les 3 axiomes suivants :

(1) $\emptyset \in \mathcal{O}$ et $E \in \mathcal{O}$

(2) $\forall \Omega_i \in \mathcal{O}, \bigcup_{i \in I} \Omega_i \in \mathcal{O}$ (I ensemble quelconque d'indic

(3) $\Omega_1 \in \mathcal{O}, \Omega_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow \Omega_1 \cap \Omega_2 \in \mathcal{O}$.

Soit (E, d) un espace métrique, c'est-à-dire, E un ensemble et $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ une distance.

Soit $a \in E$ et soit $r \in \mathbb{R}_+$.

Le disque ouvert de centre a et rayon r est :

$D(a,r) = \{x \in E : d(a,x) < r\}$

Le disque fermé de centre a et rayon r est :

$\overline{D(a,r)} = \{x \in E : d(a,x) \leq r\} = D(a,r) \cup C(a,r)$

où

$C(a,r) = \{x \in E : d(a,x) = r\}$ est le cercle de centre a et rayon r.

On a donc que :

pour $\mathbb{R}$ avec $d(x,y) = |x-y|$,

$D(a,r) =]a-r, a+r[$ et $\overline{D(a,r)} = [a-r, a+r]$.

pour $\mathbb{R}^2$ avec la norme euclidienne $d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$

$D(a,r) =$ 

$\overline{D(a,r)} = D(a,r) \cup C(a,r)$

disque "usuel" sans bord — disque "usuel" avec son bord.

et de même pour $\mathbb{C}$ avec la distance euclidienne :

Si $z = x+iy$ et $w = u+iv$, $d(z,w) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$.

Définition : Soit (E, d) un espace métrique.
On dit qu'un ensemble $A \subset E$ est **borné**
si $\exists r > 0$ et $\exists a \in E$ t.q. $A \subset B(a, r)$.

Définition : Soit (E, d) esp. métrique. On dit que
$\Omega \subset E$ est **ouvert** ssi :
ou bien $\Omega = \emptyset$
ou bien $\Omega \neq \emptyset$ et $\forall a \in \Omega\ \exists r > 0$ t.q. ~~B(a~~
$D(a, r) \subset \Omega$.

Définition : Soit $(E, \mathcal{O})$ esp. topologique. On dit que
$F \subset E$ est **fermé** ssi $E \setminus F$ est ouvert.

Définition : Soit $A \subset \mathbb{R}$, ou $A \subset \mathbb{R}^2$, ou $A \subset \mathbb{C}$.
On dit que A est **compact** ssi A est fermé et borné.
