J. Raissy. L2 Spécial, II Sémestre année 2012-2013.

ANALYSE COMPLEXE

Cours (24H).

1. Séries entières, fonctions analytiques.

Petite motivation: assez souvent, en physique, on a affaire à des développement en série d'une fonction, et ces développements peuvent avoir plusieurs origines:

- une superposition de plusieurs phénomènes
- des développements perturbatifs, lorsque les calculs directs sont trop difficiles à mener (ex: hydrodynamique etc. séries temporelles en astronomie, électrodynamique quantique)
- parfois, une quantité phisique est donnée par une formule faisant intervenir une fonction que l'on ne sait pas calculer, parce que donnée par une formule compliquée; on peut alors faire l'évaluation numerique de cette formule à partir de développements en série de Fourier (qui vous avez vu avec Monsieur Buff), de Taylor, etc

et cettes motivations marchent bien pour les matheux aussi!

Pour nous, dans ce cours, nous allons voir aussi qu'il y'a une relation stricte avec les séries entières et les fonctions holomorphes, et donc nous avons besoin de rappeler les définitions et les notions principaux sur les séries entières et les fonctions analytiques.

• Formules de Taylor.

Idée generale : f fonction au moins k fois dérivable sur un intervalle J, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. ~~Alors~~

Si $a \in J$ nous voudrions écrire que pour tout x dans une voisinage de a, on à :

$$f(x) \approx \underbrace{f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}_{(*)}$$

et il faut tout de suite préciser que ce que veut dire "$\approx$" ("presque").

On note $R_k(x)$ la différence entre $f(x)$ et la somme $(*)$ ainsi écrite, c'est-à-dire :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_k(x)$$

$R_k(x)$ = reste de Taylor "petite quantité" (on espère)

$T_k(x)$ = polynôme de Taylor d'ordre k en x

Il y a plusieurs manières de faire en sorte que $R_k(x)$ soit petit :

- faire tendre x vers a (à k fixé) : Formule de Taylor-Lagrange
- faire tendre k vers l'infini (à x fixé) : $\leadsto$ théorie des series entières.

Théorème (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soient J un intervalle et f fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur J, et de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ par morceaux sur J, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit $a \in J$. Alors, pour tout $x \in J$, on a $f(x) = T_k(x) + R_k(x)$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\, dt$$

Théorème (Égalité de Taylor-Lagrange) : Valable seul pour $f : J \to \mathbb{R}$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle J et $k+1$ fois dérivable sur l'intérieur de J et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in J$. Alors $\forall x \in J$, il existe $\xi \in]a, x[$ ou $]x, a[$ t.q. : $f(x) = \sum^{k} \frac{(x-a)^n}{} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{k+1}}{} f^{(k+1)}(\xi)$

Corollaire (Inegualité de Taylor - Lagrange)

Soit f fonction C^k sur J intervalle, $k+1$ fois dérivable sur l'interieur de J, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in J$.

Alors $\forall x \in J$ on a:

$$\left\| f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right\| \leq \frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!} \sup_{t\in J} \|f^{(k+1)}(t)\|$$

- Séries entières :

Définition : Une série entière centrée sur z_0 est une fonction de la forme

$$z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite donnée, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème du rayon. (Théo / Définition).

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ une série entière centrée en z_0.

On appelle rayon de convergence l'element de $\overline{\mathbb{R}^+}$ défini par:

$$\rho \stackrel{déf}{=} \sup \{ r \in \mathbb{R}^+ : (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \}.$$

Alors la série entière converge normalement, uniformement et absolument sur tout compact du disque $B(z_0, \rho) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho \}$ et diverge pour tout z t.q $|z - z_0| > \rho$.

On n'affirme rien pour $|z - z_0| = \rho$.

Rappel (si necessaire):

On considere, pour chaque fonction u à valeurs réelles ou complexes, $\|u\| = \sup_{x\in U} |u(x)|$, $(u : U \longrightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C})$.

On dit qu'une série de fonction u_n est normalement convergente si la série des normes $\sum_n \|u_n\|$ est une série convergente à termes positifs.

Tout série normalement conv. est uniformément convergente

Lemme d'Abel :

Soient r, r_0 nombres réelles t.q. $0 < r < r_0$.

S'il existe un nombre fini $M > 0$ t.q.

$$|a_n|(r_0)^n \leq M \qquad \forall n \geq 0 \text{ entier}$$

$\Rightarrow$ la série $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ converge normalement pour $|z - z_0| \leq r$.

Expression du rayon de convergence (Hadamard)

Le rayon de conv. d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ centrée en $z_0 = 0$ satisfait :

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \to +\infty} |a_n|^{1/n} \qquad \left[\text{i.e.} \begin{array}{l} \text{si } \limsup = 0 \Rightarrow \rho = \infty \\ \text{si } \limsup = \infty \Rightarrow \rho = 0 \\ \text{si } \limsup < \infty \Rightarrow \rho = \frac{1}{\limsup} \end{array} \right]$$

(où $\limsup_{n \to \infty} b_n = \lim_{p \to \infty} \left(\sup_{n \geq p} b_n \right)$ pour les suites de réels (b_n))

Ici : parler aussi du critère de d'Alembert !!! (*)

Définition : Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

Soient $f : \Omega \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$ fonction et $z_0 \in \Omega$. On dit que f est développable en série entière centrée en z_0 s'il existent un ouvert V contenant z_0 et une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t.q.

$$\forall z \in V \qquad f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

Le rayon d'une serie entière ne depends des coefficients que de manière "relâchée" : si $F = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle sans pôles sur $\mathbb{N}$, la série entière $\sum_{n \geq 0} F(n) a_n (z - z_0)^n$ a même rayon que $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$. $\boxed{\text{voir TD}}$ Donc on a :

Théorème : (Dérivabilité d'une série entière)

Soient $J \subset \mathbb{R}$ ouvert, $x_0 \in J$, $f : J \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$ fonction développable en série entière centrée sur x_0 : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Si $\rho \neq 0$ est le rayon de cette série, alors f est C^∞ sur $]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ et de plus, f est dérivable autant de fois que voulu et,

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \qquad f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x - x_0)^{n-k}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Enfin $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

La série $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ est appelée la <u>série de Taylor de f en x_0</u>.

<u>Rmq.</u> on montrera que ce résultat est valable aussi pour une série entière de la variable complexe.

• <u>Fonctions analytiques</u> :

<u>Définition</u> : ~~Soit~~ On dit que $f : \Omega \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$ fonction, Ω ouvert de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est <u>analytique sur Ω</u> si $\forall z_0 \in \Omega$ f admet un développement en série entière centrée sur z_0.

<u>Théorème</u> : Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ série entière de rayon de conv. $\rho > 0$, et notons f sa somme sur $D(0, \rho)$. Alors f est analytique sur $D(0, \rho)$.

(*) Critère de d'Alembert.

(A) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ série entière centrée en $z_0 = 0$.

Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existe et $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$, alors :

(i) si $\ell = 0 \Rightarrow \rho = +\infty$

(ii) si $\ell = +\infty \Rightarrow \rho = 0$

(iii) si $\ell \in]0, +\infty[\Rightarrow \rho = \frac{1}{\ell}$

où ρ = rayon de conv. de la série.

(B)

"Opérations" avec les séries entières : ($\sim$TD)

Addition : $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$

$$A(x) + B(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n \quad \text{où } c_n = a_n + b_n$$

Produit : $A(x)B(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$ où $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$.

Rayons de convergences ?

Prop : Soient $A(x)$, $B(x)$ deux séries entières avec rayons de convergence $\geq \rho$. Soient $S(x) = A(x) + B(x)$ et $P(x) = A(x) \cdot B(x)$

Alors : le séries $S(x)$ et $P(x)$ ont rayon de convergence $\geq \rho$.

exo maison pour vous la preuve !

Él neutre pour somme : 0

Él neutre pour produit : 1 propriétés somme et produit ? (demande pour étudiantes !).

Substitution d'une série dans une autre

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \qquad B(y) = \sum_{n\geq 0} b_n y^n$$

quand nous pourons faire $A(B(y))$?

$\boxed{\text{Il est essentiel que } b_0 = 0}$

Si $b_0 = 0 \Rightarrow$ on peut considerer : $A(B(y)) = \sum_{n\geq 0} a_n (B(y))^n$

et on a :

Prop : Soit $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ avec rayon positif $\rho(S)$ et soit $T(x) = \sum_{n\geq 1} b_n x^n$ avec rayon $\rho(T) > 0$.

Alors la série $U(x) = S(T(x))$ a rayon positif.

Prop. comp : $(S_1 + S_2) \circ T = S_1 \circ T + S_2 \circ T$

$$(S_1 S_2) \circ T = (S_1 \circ T)(S_2 \circ T)$$

$$1 \circ T = 1.$$

Exercise: Pour que $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ possède un élém. inverse pour la multiplication il faut et il suffit que $a_0 \neq 0$ i.e., $S(0) = 0$.

Preuve: Si $T(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ est t.q. $S(x)T(x) = 1$

$\Rightarrow a_0 \cdot b_0 = 1 \Rightarrow a_0 \neq 0$.

De l'autre côté, supposons $a_0 \neq 0$. Alors $\frac{1}{a_0} S(x) \doteq S_1(x)$ a un inverse $T_1(x)$. En fait, nous pouvons écrire

$S_1(x) = 1 - U(x)$ avec $U(x) = \sum_{n\geq 1} (-a_0^{-1} a_n) x^n$

Nous savons que:

$$(1-y)(1+y+\dots+y^n+\dots) = 1.$$

$\Rightarrow$ nous pouvons substituer $U(x)$ à y et trouver un inverse.

Prop: Si le rayon de S est $\neq 0 \Rightarrow$ le rayon de T est $\neq 0$

Nous avons vu donc que les séries entières sont des fonctions spéciales et par exemple, même si nous considérons une série entière complexe, nous pouvons,

l'ui voir comme $f: \overset{\text{ouvert}}{\Omega} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, et, d'une manière formelle, nous pouvons écrire sa dérivée. ~~Nous allons voir~~ Mais Est-ce que ça a un sense?

Nous allons voir dans nôtre cours que oui, mais d'abord il nous faut parler de: fonctions holomorphes.

Fonctions holomorphes

1. Définitions – Conditions de Cauchy

Définition : Soit Ω un ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$.

Une fonction f de Ω dans $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, est dite holomorphe dans Ω si elle est dérivable en tout point de Ω
où la notion de dérivabilité se définit comme dans le cas
où la variable est réelle, c'est-à-dire

$$\forall z \in \Omega \quad \lim_{\substack{u \to 0 \\ u \neq 0 \\ u \in \mathbb{C}}} \frac{f(z+u) - f(z)}{u} \quad \text{existe}.$$

On notera $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes dans Ω.

Le propriétés suivantes se démontrent comme dans le cas
où la variable est réelle :

1. $\mathcal{O}(\Omega)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$; $\mathcal{O}(\Omega)$ est un anneau ; c'est-à-dire :

   $f, g \in \mathcal{O}(\Omega) \Rightarrow$ (·) $\lambda f + \mu g \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

   (··) $f \cdot g \in \mathcal{O}(\Omega)$. (+ prop. opéra

2. $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $f \not\equiv 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{O}(\Omega_1)$

   où $\Omega_1 = \Omega \setminus f^{-1}(0)$.

3. $f : \Omega \to \Omega'$, $g : \Omega' \to \mathbb{C}$, Ω, Ω' ouverts
   f et g holomorphes. $\Rightarrow g \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomo

   i.e., $g \circ f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Notons que : les formules donnant la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient et d'un fonction composée sont les mêmes que dans le cas réel.

Exemples :

- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $f(z) = z^n$, $n \geq 0$, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

$\Rightarrow$ tout polynôme est holomorphe dans $\mathbb{C}$, et une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus Q^{-1}(0)$.

- Fonction exponentielle.

On définit pour $z \in \mathbb{C}$:

$$e^z \doteq \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

On a vu que cette série entière a rayon de convergence $+\infty$, et elle admet une dérivée :

$$\frac{d}{dz}(e^z) = \sum_{n \geq 0} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = e^z.$$

- Séries entières : de ce que nous avons vu, on déduit qu'une série entière est dérivable dans son disque de convergence $D(0, \rho)$ $\Rightarrow$ elle $\in \mathcal{O}(D(0,\rho))$.

Conditions de Cauchy :

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et soient : $P = \mathrm{Re}(f)$, $Q = \mathrm{Im}(f)$, donc $f = P + iQ$. On peut considérer f comme une fonction de deux variables réelles en posant, si $z = x + iy$, $f(z) = f(x, y)$.

Théorème :

$$f \text{ holomorphe dans } \Omega \iff \begin{cases} (x,y) \mapsto f(x,y) \text{ différentiable dans } \Omega \\ \text{et} \\ \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} P \text{ et } Q \text{ différentiables dans } \Omega \\ \text{et} \\ \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

Définition : Les relations

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}}$$ Conditions de Cauchy

Preuve :

Première équivalence :

Par définition, $f \in \mathcal{H}(\Omega) \iff \forall z_0 \in \Omega$ on a :

$$f(z_0+u) - f(z_0) = u f'(z_0) + u\,\varepsilon(u) \quad \text{avec } \varepsilon(u) \to 0 \text{ si } u \to$$

Notons $f'(z_0) = c$ et posons $\begin{cases} \eta(u) = \dfrac{u}{|u|}\varepsilon(u) & \text{si } u \neq 0 \\ \eta(0) = 0 \end{cases}$

Donc la dérivabilité de f en z_0 s'écrit comme :

$$f(z_0+u) - f(z_0) = cu + |u|\,\eta(u) \quad \text{où } \eta(u) \to 0 \text{ si } u \to 0.$$

En posant $z_0 = x_0 + iy_0$ et $u = h + ik$, et en considérant f comme une fonction de deux variables réelles, on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = ch + ick + \sqrt{k^2+h^2}\,\eta(h,k) \\ \text{où } \eta(h,k) \to 0 \text{ si } (h,k) \to (0,0) \end{array}} \quad (1)$$

La différentiabilité de f $(= f(x,y))$ en (x_0,y_0) s'écrit comme

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot k + \sqrt{h^2+k^2}\cdot\alpha(h,k) \\ \text{où } \alpha(h,k) \to 0 \text{ si } (h,k) \to (0,0) \end{array}} \quad (2)$$

Si f est dérivable en z_0, on a (1) et donc on a (2), c'est-à-dire f est différentiable en (x_0,y_0) ; en plus $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = c$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = ic \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0.$

Réciproquement : si f est différentiable en (x_0,y_0) on a (2) et si, en plus, on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ il nous suffit de poser $c = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ pour avoir (1).

ok

Deuxième équivalence :

On sait que : $(x,y) \to f(x,y)$ différentiable dans Ω

$\iff P$ et Q sont différentiables dans Ω.

D'autre part :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right),$$ d'où le résultat.

ok

Corollaires :

(i) En posant $z_0 = x_0 + iy_0$, on a :

$$\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

[on l'a vu en cour de démonstration].

(ii) On verra que : si f est dérivable une fois dans Ω (i.e., f est holomorphe), alors f est indéfiniment dérivable dans Ω ; par suite, P et Q sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. En dérivant les conditions de Cauchy on obtient alors :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0$$

c'est-à-dire :

> La partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe sont donc des fonctions harmoniques (c'est-à-dire, elles sont solution de l'equation de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$)

Fonctions Analytiques :

Définition : $f : \Omega \to \mathbb{C}$, f est analytique dans Ω si et seulement si : $\forall z_0 \in \Omega$ $\exists$ $D(z_0, R) \subset \Omega$ et $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de complexes t.q.

$$\forall z \in D(z_0, R), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

(où $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$).

Une fonction analytique est donc égale, localement, à la somme d'une série entière et par suite est dérivable. D'où :

$$\boxed{\text{Toute fonction analytique dans } \Omega \text{ est holomorphe dans } \Omega}$$

On verra que la réciproque est vrai aussi et donc, lorsque la variable est complexe, une fonction dérivable une fois est indéfinimen

2. Intégrale d'une fonction continue sur une route

• Définitions d'une route et d'un circuit :

Un *route* γ est une application continue de $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ (intervalle réel) dans $\mathbb{C}$, continûment dérivable par morceaux sur $[\alpha, \beta]$.

Si, en plus, $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, on dit que γ est un *circuit*.

Propriété immédiate : $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$ est un compact connexe de $\mathbb{C}$.

[en effet, Γ est l'image continue du compact connexe $[\alpha, \beta]$]

Exemples :

① Si z_0, z_1 sont deux points de $\mathbb{C}$,
$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ déf par $\gamma(t) = t z_1 + (1-t) z_0$
est une *route* dont l'image Γ est le segment $[z_0, z_1]$.
$(\gamma(0) = z_0,\ \gamma(1) = z_1)$.

② Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, soit $r > 0$ et soit $n \in \mathbb{Z}^*$
$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ déf par $\gamma(t) = z_0 + r e^{int}$
est un *circuit* dont l'image Γ est le cercle de centre z_0 et de rayon r, "décrit n fois, dans le sens positif si $n > 0$, dans le sens négatif si n est négatif".

• Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur l'image d'une route

Soit γ une route, $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, et soit $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$.
Soit f une fonction continue sur Γ, à valeurs complexes.
On pose, par définition :

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\, dz \doteq \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt}$$

et on appelle cette intégrale, l'intégrale de f sur γ

Remarque : Si on pose : $P = \mathrm{Re}(f)$, $Q = \mathrm{Im}(f)$,

$$\gamma(t) = x(t) + i\, y(t)$$

on a :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta \left[P(x(t), y(t)) + i\, Q(x(t), y(t))\right] \cdot \left(x'(t) + i\, y'(t)\right) dt$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma P\,dx - Q\,dy + i \int_\gamma Q\,dx + P\,dy.}$$

où les deux intégrales du second membre sont des intégrales curvilignes classiques (avec P et Q fonctions numériques de 2 variables réelles).

Les propriétés usuelles des intégrales curvilignes (changement de paramétrage, routes opposées, routes juxtaposées) nous fournissent alors les résultats suivants :

1. l'intégrale $\int_\gamma f(z)\,dz$ ne change pas de valeur si on remplace la route γ par une route γ_1 déduite de γ par "changement de paramètre", c'est-à-dire,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$$

pour tout γ_1 de la forme : $\gamma_1(u) = \gamma(\theta(u))$ où $\theta : [\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha, \beta]$ est continûment dérivable, $\theta'(u) > 0$ $\forall u \in [\alpha_1, \beta_1]$ et $\theta(\alpha_1) = \alpha$, $\theta(\beta_1) = \beta$.

2. Les intégrales d'une même fonction f sur deux routes opposées sont opposées.

[La notion de route opposée peut se définir rigoureusement de manière simple. Concrètement, cela correspond à un "changement du sens de parcours".]

3 L'intégrale d'une fonction f sur la juxtaposition de deux routes γ_1 et γ_2 est égale à la somme de l'intégrale de f sur γ_1 et de l'intégrale de f sur γ_2.

$$\int_{\gamma_2 * \gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Exemple (simple) de calcul d'intégrale :

Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ où $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$,

et soit $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$.

$\Gamma = \gamma([0, 2\pi]) = \partial D(z_0, r)$.

f est continue sur Γ. On a :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it}}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i.$$

- Propriétés.

Soit γ une route d'image Γ, et soit f et g deux fonctions continues sur Γ. On a :

① $\displaystyle\int_\gamma (f(z) + \lambda g(z))\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \lambda \int_\gamma g(z)\,dz \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$

② $\boxed{\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \sup_{z \in \Gamma} |f(z)| \cdot L(\gamma) \quad \text{où } L(\gamma) = \text{longueur de } \gamma}$

Preuve :

① Il suffit de revenir à la définition et d'utiliser la linéarité de l'intégrale (classique) pour les fonctions d'une variable réelles à valeurs complexes. ■

② : On pose $\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$.

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| = \left| \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \right| \leq \int_\alpha^\beta |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\,dt$$

$$\leq \sup_{z \in \Gamma} |f(z)| \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

et $L(\gamma) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$ par définition. ■

Interprétation des propriétés ① et ② :

Soit $\mathcal{C}(\Gamma)$ l'espace vectoriel des applications continues de Γ dans $\mathbb{C}$, et soit $I : \mathcal{C}(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par :

$$I(f) = \int_\gamma f(z)\, dz.$$

D'après ① I est linéaire.

Si on munit $\mathcal{C}(\Gamma)$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, c'est-à-dire $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\Gamma} |f(z)|$, d'après ②, cette forme linéaire I est continue.

Corollaire :

$$\left.\begin{array}{l} f_n : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C} \text{ continue } (n = 0, 1, 2 \ldots) \\ f_n \longrightarrow f \text{ uniformément sur } \Gamma \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ continue sur } \Gamma \\ \text{et} \\ \displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz \end{array}\right.$$

Preuve :

Dire que f_n converge vers f uniformément sur Γ, c'est dire que f_n converge vers f dans $(\mathcal{C}(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$.

Donc on a le résultat puisque I est continue. ∎

Cas des Séries.

Ce corollaire s'applique à la suite des sommes partielles d'une série de terme général u_n continue sur Γ. Si cette série converge uniformément sur Γ, alors on peut intégrer terme à terme.

Dans le cas des séries on a aussi un critère (suffisant) commode pour vérifier la convergence uniforme : il suffit de vérifier qu'il existe une suite $(\alpha_n) \in \mathbb{R}_+$ telle que la série de terme général α_n converge et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \Gamma,\quad |u_n(z)| \leq \alpha_n$$

(c'est-à-dire, la série converge normalement sur Γ)

3. Formule intégrale de Cauchy.

- Définition des (P) domaines.

Nous serons amenés à considerer des domaines Δ du plan complexe (où un domaine est un ouvert connexe) ayant les propriétés suivantes :

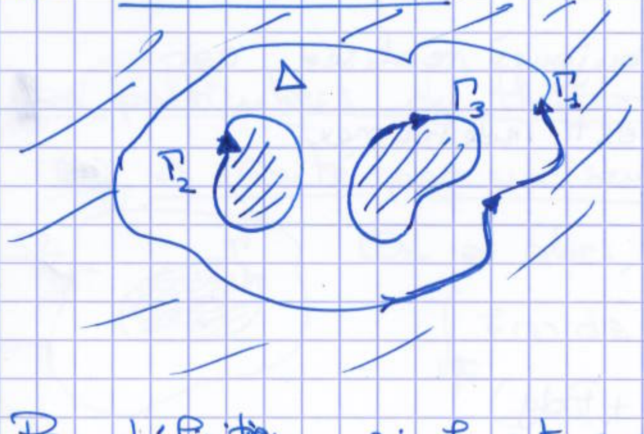
(P_1) Δ est bornée

(P_2). la frontière $\partial\Delta$ de Δ est constituée par un nombre fini de courbes Γ_j ($j = 1, .., n$) disjointes deux à deux ; chaque Γ_j étant l'image d'un circuit γ_j sans points doubles sauf bien sûr le point origine extrémité)

(P3) "on oriente chaque Γ_j de sorte qu'on laisse l'aire intérieure à Δ à sa gauche"(*)

[(*) Pour une presentation rigoureuse de (P_3), voir H. Cartan: "Théorie élémentaire des fonctions analytiques", Chapitre II § 1.9]

Les domaines Δ vérifiant (P_1), (P_2) et (P_3) seront appelés des (P)-domaines.



Par définition, si f est continue sur $\partial\Delta$, on pose:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Les propriétés (P_2) et (P_3) nous permettent de désigner l'intégrale $\int_{\gamma_j} f(z)\,dz$ par le symbole $\int_{\Gamma_j} f(z)\,dz$ en précisant le sens de parcours sur Γ_j ($\overleftarrow{\Gamma_j}$ ou $\overrightarrow{\Gamma_j}$).

<u>Par exemple</u> : si Δ est limité par un circuit extérieur Γ_1 et deux circuits intérieurs Γ_2 et Γ_2, on notera, pour toute fonction f continue sur $\partial\Delta$:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\overleftarrow{\Gamma_1}} f(z)\,dz + \int_{\overrightarrow{\Gamma_2}} f(z)\,dz + \int_{\overrightarrow{\Gamma_3}} f(z)\,dz.$$

<u>Théorème de Cauchy</u> :

Si f est une fonction <u>holomorphe</u> dans un ouvert Ω, alors pour tout <u>(P)-domaine Δ tel que $\overline{\Delta} \subset \Omega$</u>, on a :

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$

<u>Preuve</u> :

On va établir ce théorème en supposant que $P = \mathrm{Re}(f)$ et $Q = \mathrm{Im}(f)$ soient de classe C^1 dans Ω.
(Cette hypothèse supplémentaire est toujours réalisée car une fonction holomorphe dans Ω est indéfiniment dérivable dans Ω).

Pour chaque γ_j on a :

$$\int_{\gamma_j} f(z)\,dz = \int_{\gamma_j} (P\,dx - Q\,dy) + i \int_{\gamma_j} (Q\,dx + P\,dy)$$

d'où, par sommation :

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta} (P\,dx - Q\,dy) + i \int_{\partial\Delta} (Q\,dx + P\,dy).$$

On obtient donc, d'après la formule de Green-Riemann :

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \iint_\Delta \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + i \iint_\Delta \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy$$

D'où le résultat, d'après les conditions de Cauchy. ∎

<u>Rappel</u> : <u>Formule de Green-Riemann.</u>

On prend un (P)-domaine Δ en $\mathbb{R}^2$, $\tilde{P}, \tilde{Q}$ de classe C^1 sur Ω ouvert t.q. $\overline{\Delta} \subset \Omega$. Alors :

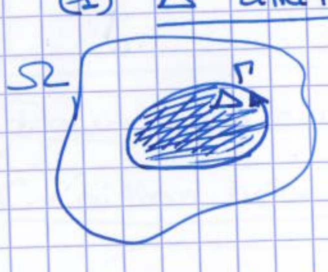
$$\int_{\partial\Delta} \tilde{P}\,dx + \tilde{Q}\,dy = \iint_\Delta \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

<u>Remarque</u> : on peut prouver ce théorème sans supposer P et Q de classe C^1, mais alors la démonstration est moins élémentaire (voir, par exemple, le livre de H. Cartan).

Pour démontrer que toute fonction holomorphe dans Ω est analytique dans Ω (et donc indéfiniment dérivable dans Ω) on va utiliser ce théorème. Il est donc mieux, si on ne veut pas "tourner en rond", d'établir le théorème de Cauchy sans supposer P et Q de classe C^1.

<u>Cas particuliers du théorème de Cauchy.</u>

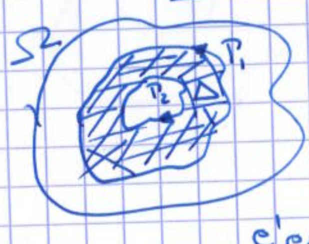
(1) <u>Δ limité par un seul circuit Γ</u>



On a alors, si f est holomorphe dans Ω :

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

(2) <u>Δ limité par deux circuits Γ_1 et Γ_2</u>



On a alors, si f est holomorphe dans Ω :

$$\int_{\overleftarrow{\Gamma_1}} f(z)\,dz + \int_{\overrightarrow{\Gamma_2}} f(z)\,dz = 0$$

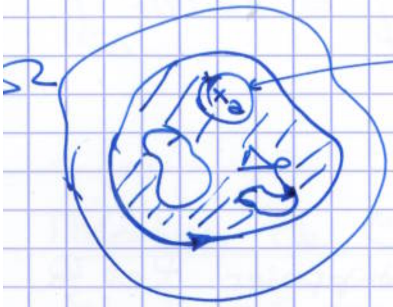
c'est-à-dire : $\displaystyle \int_{\overleftarrow{\Gamma_1}} f(z)\,dz = + \int_{\overleftarrow{\Gamma_2}} f(z)\,dz \left(= - \int_{\overrightarrow{\Gamma_2}} f(z)\,dz \right)$

Formule intégrale de Cauchy :

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω, et soit Δ un (P)-domaine t.q. $\overline{\Delta} \subset \Omega$.

Alors :
$$\forall a \in \Delta \quad f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

Preuve : On va se ramener au théorème de Cauchy.



Soit $\rho_0 > 0$ assez petit pour que le disque fermé $\overline{D(a,\rho_0)}$ de centre a et rayon ρ_0 soit inclus dans Δ.

La fonction $z \longmapsto \frac{f(z)}{z-a}$ est holomorphe dans l'ouvert $\Omega \setminus \{a\}$.

D'autre part, pour tout $\rho \in]0, \rho_0]$, $\Delta_\rho = \Delta \setminus \overline{D(a,\rho)}$ est un (P)-domaine t.q. $\overline{\Delta_\rho} \subset \Omega \setminus \{a\}$.

On a donc, d'après le théorème de Cauchy, vu que $\partial\Delta_\rho = \partial\Delta \cup \overrightarrow{\mathcal{C}(a,\rho)}$:

$$\forall \rho \in]0, \rho_0] \qquad \int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_{\overleftarrow{\mathcal{C}(a,\rho)}} \frac{f(z)}{z-a}\, dz. \qquad (1)$$

Or, on a :

$$\int_{\overleftarrow{\mathcal{C}(a,\rho)}} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_{\overleftarrow{\mathcal{C}(a,\rho)}} \frac{f(a) + f(z) - f(a)}{z-a}\, dz$$

$$= \underbrace{\int_{\overleftarrow{\mathcal{C}(a,\rho)}} \frac{f(a)}{z-a}\, dz}_{I_1} + \underbrace{\int_{\overleftarrow{\mathcal{C}(a,\rho)}} \frac{f(z) - f(a)}{z-a}\, dz}_{I_2(\rho)}$$

On sait que :

$$I_1 = \int_{\overleftarrow{\mathcal{C}(a,\rho)}} \frac{f(a)}{z-a}\, dz = 2\pi i\, f(a).$$

Il nous suffit donc de montrer que $\lim_{\rho \to 0} I_2(\rho) = 0$.

On a :

$$|I_2(\rho)| \leq \sup_{z \in C(a,\rho)} |f(z) - f(a)| \cdot \frac{1}{\cancel{\rho}} \cdot 2\pi \cancel{\rho} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{la longueur du cercle} \\ C(a,\rho) \text{ est } 2\pi\rho\end{array}\right]$$

f est continue au point a, puisque f est holomorphe dans Ω.

Donc, on en déduit simplement que :

$$\lim_{\rho \to 0} \left[\sup_{z \in C(a,\rho)} |f(z) - f(a)| \right] = 0.$$

Par suite, $I_2(\rho) \longrightarrow 0$ quand $\rho \to 0$.

Si nous faisons tendre ρ vers 0 dans (1), on obtient :

$$\int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 2\pi i\, f(a),$$

d'où le résultat. ■

La formule de Cauchy montre donc que les valeurs de f à l'intérieur de Δ sont déterminées par les valeurs de f sur sa frontière $\partial\Delta$.

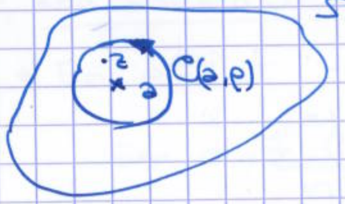
Théorème fondamental :

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert.

$$f \text{ est holomorphe dans } \Omega \iff f \text{ est analytique dans } \Omega.$$

Preuve : La condition suffisante ($\Leftarrow$) a été déjà établie.

Condition nécessaire ($\Rightarrow$)



Soit $a \in \Omega$. Nous devons trouver un disque $D(a, r)$ avec $r > 0$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes t.q.

$$\forall z \in D(a,r) \quad f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n.$$

Notons $d(a, \partial\Omega)$ = distance de a à la frontière $\partial\Omega$ de Ω.

Soit $z \in \Omega$ t.q. $|z-a| < d(a, \partial\Omega)$.

Il nous suffit donc de montrer que $\lim_{\rho \to 0} I_2(\rho) = 0$.

On a :

$$|I_2(\rho)| \leq \sup_{z \in C(a,\rho)} |f(z) - f(a)| \cdot \frac{1}{\cancel{\rho}} \cdot 2\pi \cancel{\rho}$$ [la longueur du cercle $C(a,\rho)$ est $2\pi\rho$]

f est continue au point a, puisque f est holomorphe dans Ω.

Donc, on en déduit simplement que :

$$\lim_{\rho \to 0} \left[\sup_{z \in C(a,\rho)} |f(z) - f(a)| \right] = 0.$$

Par suite, $I_2(\rho) \longrightarrow 0$ quand $\rho \to 0$.

Si ~~nous~~ nous faisons tendre ρ vers 0 dans (1), on obtient :

$$\int_{\partial\Delta} \frac{f(z)}{z-a} \, dz = 2\pi i \, f(a),$$

d'où le résultat. ■

La formule de Cauchy montre donc que les valeurs de f à l'intérieur de Δ sont déterminées par les valeurs de f sur sa frontière $\partial\Delta$.

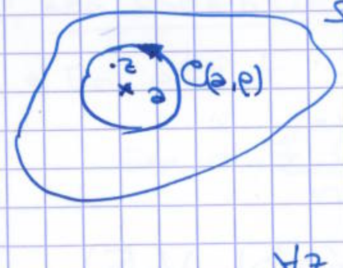
Théorème fondamental :

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert.

f est holomorphe dans Ω $\iff$ f est analytique dans Ω.

Preuve : La condition suffisante ($\Leftarrow$) a été déjà établie.

Condition nécessaire ($\Rightarrow$)



Soit $a \in \Omega$. Nous devons trouver un disque $D(a,r)$ avec $r > 0$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes t.q.

$$\forall z \in D(a,r) \quad f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n.$$

Notons $d(a, \partial\Omega)$ = distance de a à la frontière ~~de~~ $\partial\Omega$ de Ω.

Soit $z \in \Omega$ t.q. $|z-a| < d(a, \partial\Omega)$.

Soit $D(a,\rho)$ disque ouvert de centre a et rayon $\rho>0$ t.q :

$$z \in D(a,\rho) \quad \text{et} \quad \overline{D(a,\rho)} \subset \Omega.$$

Le domaine $D(a,\rho)$ [il est un domaine car il est ouvert et connexe] est limité par le circuit $\overleftarrow{\mathcal{C}(a,\rho)}$, donc il est clair que $D(a,\rho)$ soit un (P) - domaine.

D'après la formule de Cauchy :

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overleftarrow{\mathcal{C}(a,\rho)}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta .$$

Or, $\dfrac{1}{\zeta - z} = \dfrac{1}{\zeta - a - (z-a)} = \dfrac{1}{\zeta - a}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}$

$$= \frac{1}{\zeta-a}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n \qquad \left[\begin{array}{l}\text{cela } \forall \zeta \in \mathcal{C}(a,\rho) \\ \text{car si } \zeta \in \mathcal{C}(a,\rho),\ \left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|<1\end{array}\right]$$

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$$

On a donc :

$$\forall \zeta \in \mathcal{C}(a,\rho), \quad \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n\geq 0}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n$$

Donc, si on peut intégrer terme à terme dans (1), on aura :

$$f(z) = \sum_{n\geq 0}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\overleftarrow{\mathcal{C}(a,\rho)}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta\right](z-a)^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n \qquad \forall z \in D(a, d(a,\partial\Omega)).$$

où $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\overleftarrow{\mathcal{C}(a,\rho)}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta.$

Justification de l'intégration terme à terme.

Posons $V_n(\zeta) = \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n$.

Il suffit de vérifier que la série de terme général $V_n(\zeta)$ converge normalement (par rapport à ζ, bien sûr) sur $\mathcal{C}(a,\rho)$.

La fonction f est holomorphe dans Ω et elle est continue sur le compact $C(a,\rho)$. Donc $|f|$ est bornée sur $C(a,\rho)$ par un $M>0$, et on a, pour tout $\zeta \in C(a,\rho)$

$$|V_n(\zeta)| = \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-a|^{n+1}} |z-a|^n \leq \frac{M}{\rho} \frac{|z-a|^n}{\rho^n}$$

d'où la convergence normale, puisque $\frac{|z-a|}{\rho} < 1$. ∎

Propriétés importantes apparues dans cette démonstration :

Toute fonction f holomorphe dans Ω est développable en série entière, au voisinage de chaque point $a \in \Omega$, suivant les puissances de $(z-a)$, et, si on note R_a le rayon de convergence de cette série $\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$

on a $\boxed{R_a \leq d(a,\partial\Omega)}$ 1

et

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \quad (n=0,1,2,\dots) \quad \text{où } \rho>0 \text{ est t.q. } \overline{D(a,\rho)} \subset \Omega.}$$ 2.

Corollaire :

f dérivable une fois dans Ω (au sens complexe) $\Rightarrow$ f indéfiniment dérivable dans Ω

Remarques :

1. Les coefficients a_n ne dépendent pas de ρ.
   - En effet on sait que, $\forall r \in \mathbb{N}$,
     $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$; donc a_n ne dépend pas de ρ.

On peut retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Cauchy.

Soit r et r' deux nombres >0, par exemple $r<r'$, t.q. $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ et $\overline{D(a,r')} \subset \Omega$.

La fonction $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}$ est holomorphe dans $\Omega - \{a\}$.

Si on note Δ l'intérieur de la couronne délimitée par les cercles $\mathcal{C}(a,r)$ et $\mathcal{C}(a,r')$, d'après le théorème de Cauchy on a :

$$\int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta = \int_{\mathcal{C}(a,r')} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta .$$

$\Rightarrow a_n$ ne dépend pas de r.

ok.

② L'égalité : $\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$

nous donne : $f^{(n)}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}(a,r)} f(\zeta) . \frac{n!}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$

d'où on constate que la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f s'obtient par dérivation sous le signe $\int$.

3) Une fonction holomorphe f dans un ouvert Ω n'est pas égale, en général, à la somme d'une même série entière.

Ça c'est vrai si Ω est un disque.

En effet, si z_0 est le centre du disque, le développement de f en z_0 nous donne une série entière de somme $f(z)$ en tout point z du disque. Ce sera vrai en particulier si on prend comme disque le plan $\mathbb{C}$ tout entier ; dans ce cas le développement de f en n'importe quel point de $\mathbb{C}$ représentera f.

4. Inégalités de Cauchy

Théorème :

Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in]0, R[$, on a

$$|a_n| r^n \leq \sup_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$$ inégalités de Cauchy

Ces inégalités fournissent une majoration des $|a_n|$ et sont d'un usage fréquent. Il ne faut pas perdre de vu qu'elles sont valables pour tout $n \in \mathbb{N}$, et aussi pour tout $r \in]0, R[$.

Preuve : tout vien de la formule intégrale des coefficients a_n. En fait, f est holomorphe dans le disque $D(z_0, R)$, et les a_n sont les coefficients de son développement en z_0, qui est valable dans $D(z_0, R)$. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall r \in]0, R[\qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta.$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall r \in]0, R[$

$$|a_n| \leq \left|\frac{1}{2\pi i}\right| \cdot \int_{C(z_0, r)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{n+1}} \, d\zeta \leq \sup_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)| \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{C(z_0, r)} d\zeta$$

$$= \sup_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)| \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r$$

$$= \sup_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)| \cdot \frac{1}{r^n}.$$

d'où le résultat. ∎

Théorème de Liouville

Définition : une fonction entière est une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$.

Théorème (Liouville)

Toute fonction entière bornée est constante.

Preuve :

Soit f une fonction entière bornée, c'est-à-dire t.q.
$\exists M > 0 : \forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leq M$.

Le développement de f à l'origine (par exemple) représente f dans tout $\mathbb{C}$.

On a donc : $\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

D'après les inégalités de Cauchy, en utilisant le fait que f est bornée, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in]0, +\infty[, \quad |a_n| \leq \frac{M}{r^n}$.

Donc il suffit de faire tendre r vers l'∞ et on obtient :

$a_n = 0 \quad \forall n \neq 0$.

Donc : $\forall z \in \mathbb{C}, \ f(z) = a_0$, d'où le résultat. ∎

Théorème de d'Alembert

Tout polynôme non constant admet au moins un zero

Preuve :

On va vérifier que : si un polynôme n'a pas de zéros, son inverse, qui est donc une fonction entière, est bornée et donc, d'après le théorème de Liouville, constant.

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$, $a_n \neq 0$, un polynôme de degré n, sans zéros. Posons $f = \frac{1}{P}$. f est une fonction entière.

Démontrons qu'elle est bornée.

Pour tout $z \neq 0$, $P(z) = a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right)$.

La fonction $z \mapsto \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right]$ tend vers 1 pour

$|z| \to +\infty$. Il existe donc r, que l'on peut supposer > 1, t.q

$$|z| > r \Rightarrow \left|1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \dots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right| > \frac{1}{2}$$

D'où $|z| > r \Rightarrow |P(z)| > \frac{|a_n|}{2}$ et, par suite :

$$|z| > r \Rightarrow |f(z)| < \frac{2}{|a_n|}.$$

Or, f est continue sur le compact $\overline{D(0,r)}$, donc

$\exists M > 0 : |z| \leq r \Rightarrow |f(z)| \leq M$.

Par suite $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq \sup\left\{\frac{2}{|a_n|}, M\right\} < +\infty$

et donc f est bornée.

Donc f est constante $\Rightarrow P$ est constant. Contradiction ↯

5. Théorème des zéros isolés.

Théorème (fondamental)

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe dans Ω, où $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un domaine (càd ouvert et connexe).

Si il existe $D \subset \Omega$ ouvert et $D \neq \emptyset$ t.q. $\forall z \in D \; f(z) = 0$, alors $f(z) = 0 \; \forall z \in \Omega$.

Preuve :

Soit $f^{-1}(0)$ l'ensemble des zéros de f et soit A l'intérieur de $f^{-1}(0)$. On va démontrer que, dans l'espace topologique Ω, (muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{C}$), A est non vide, et à la fois ouvert et fermé. On en déduira alors, puisque Ω est connexe, que $A = \Omega$, et par suite, puisque $A \subset f^{-1}(0) \subset \Omega$ que $f^{-1}(0) = \Omega$, d'où le résultat.

(i) $A \neq \emptyset$. En effet on a par hypothèse que $\emptyset \neq D \subset f^{-1}(0)$, donc $D \subset A$ car D est ouvert).

(ii) A ouvert (relativement à Ω) : immédiat.

(iii) A fermé (relativement à Ω) :

Démontrons que l'adhérence $\bar{A}$ de A relativement à Ω est contenue dans A. $\bar{A}^{\Omega}$

Soit $\alpha \in \bar{A}^{\Omega}$. Donc $\exists (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite de points de $\Omega \cap A$, t.q. $\alpha = \lim_{n \to \infty} z_n$.

Il s'agit de démontrer que $\alpha \in A$. Il nous faut donc trouver un disque de centre α t.q, dans ce disque, f soit identiquement nulle.

Soit $D(\alpha, r)$ un disque ouvert de centre α inclus dans Ω. Il existe car f est holomorphe dans Ω et donc y est analytique. Donc:

$$\forall z \in D(\alpha, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z-\alpha)^n.$$

f étant indéfiniment dérivable dans Ω, chaque $f^{(n)}$ est continue, en particulier en α.

D'où $\quad f^{(n)}(\alpha) = \lim\limits_{k \to \infty} f^{(n)}(z_k) \quad \forall n \geq 0$.

Or, f est identiquement nulle dans l'ouvert A et on en déduit qu'il en est de même pour toutes ses dérivées $n^{\text{èmes}}$. D'où, puisque $z_k \in A$, $f^{(n)}(z_k) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(\alpha) = 0$.

On en déduit que f est identiquement nulle dans $D(\alpha, r)$. ∎

Remarque: Ce Théorème est faux si on ne suppose pas que Ω est connexe

Il suffit en effet de prendre pour Ω la réunion de deux disques ouverts D_1 et D_2 disjoints et de prendre pour f la fonction égale à zéro dans D_1 et à 1 dans D_2.

Corollaire: **Principe du Prolongement Analytique**

Soient f et g deux fonctions holomorphes dans Ω domaine.
Si $f = g$ dans D ouvert non vide de Ω, alors $f = g$ dans Ω.

Preuve: Il suffit d'appliquer le Théorème précédent à $f-g$.

Notion de prolongement analytique.

Étant donné une fonction f analytique dans un ouvert D non vide, et un domaine Ω contenant D ($D \neq \Omega$), on dit que f est prolongeable analytiquement dans Ω s'il existe une fonction F, analytique dans Ω, et dont la restriction à D est égale à f.

D'après le théorème précédent il est clair qu'une telle fonction F, si elle existe, est unique. On dit que F est le prolongement analytique de f à Ω.

Soit f holomorphe dans un domaine Ω, f pas identiquement nulle.
Alors les zéros de f sont isolés.

Preuve :

Soit z_0 un zéro de f (càd $f(z_0)=0$). Il s'agit de trouver un disque $D(z_0,r)$ centré en z_0, avec rayon $r>0$, tel que, dans ce disque le seul zéro de f est z_0.

Soit $R>0$ t.q. $D(z_0,R)\subset\Omega$ (R existe car $z_0\in\Omega$ et Ω est ouvert). On a, $\forall z\in D(z_0,R)$:

$$f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n \quad \text{car } f \text{ est holomorphe.}$$

D'après le théorème fondamental, on est assuré que f n'est pas identiquement nulle dans $D(z_0,R)$, sinon on aurait $f\equiv 0$ dans Ω.

Les a_n ne sont donc pas tous nuls. Soit $q\in\mathbb{N}$ l'indice du premier a_n non nul.

On a donc :

$$\forall z\in D(z_0,R) \quad f(z)=a_q(z-z_0)^q+a_{q+1}(z-z_0)^{q+1}+\cdots$$
$$=(z-z_0)^q\left(a_q+a_{q+1}(z-z_0)+a_{q+2}(z-z_0)^2+\cdots\right.$$

avec $a_q\neq 0$.

Notons $g(z)=a_q+a_{q+1}(z-z_0)+a_{q+2}(z-z_0)^2+\cdots$

g est la somme d'une série entière convergente dans $D(z_0,R)$, donc elle est continue en z_0, ce qui implique :

$$a_q=\lim_{z\to z_0} g(z).$$

a_q étant non nul, on peut trouver $r\in\,]0,R[$ t.q :

$$\forall z\in D(z_0,r) \qquad g(z)\neq 0.$$

Le seul zéro de f dans $D(z_0,r)$ est donc z_0. ∎

Corollaire 1.

Soit f holomorphe dans un domaine Ω, f pas identiquement nulle.
Alors $f^{-1}(0)$ n'a pas de point d'accumulation dans Ω.

Preuve: En effet, $f^{-1}(0)$, est image réciproque du fermé $\{0\}$ par f continue de Ω dans $\mathbb{C}$, et donc $f^{-1}(0)$ est fermé relativement à Ω. Donc tout point d'accumulation dans Ω de $f^{-1}(0)$ appartiendrait à $f^{-1}(0)$; ceci est impossible car tous le points de $f^{-1}(0)$ sont isolées. $\blacksquare$

Remarques:

1. $f^{-1}(0)$ peut avoir un point d'accumulation sur $\overline{\Omega}$: par exemple $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ qui est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
2. On peut démontrer réciproquement, en utilisant les produits infinis, que tout sous-ensemble A d'Ω sans points d'accumulation dans Ω est l'ensemble des zeros d'une fonction f holomorphe dans Ω.

Corollaire 2: (conséquence immédiate du Corollaire 1).
Soit f holomorphe dans un domaine Ω.
Soit $A \subset \Omega$, tel que A admet au moins un point d'accumulation dans Ω et $\forall z \in A \;\; f(z) = 0$.
Alors $f \equiv 0$ dans Ω.

Corollaire 3 : (conséquence immédiate du Corollaire 2)
Soient f et g holomorphes dans un domaine Ω.
Soit $A \subset \Omega$ tel que A admet au moins un point d'accumulation dans Ω et $\forall z \in A$, $f(z) = g(z)$.
Alors $f \equiv g$ dans Ω.

Remarque : les corollaires 2 et 3 améliorent les résultats precedents (Théorème fondamental et son corollaire).

Corollaire 4 :
Soit f holomorphe dans un domaine Ω et pas identiquement nulle.
Alors $\forall K$ compact (fermé et borné) d'Ω on a que $K \cap f^{-1}(0)$ est fini.

Preuve.
Sinon $K \cap f^{-1}(0)$ serait un sous-ensemble infini inclus dans le compact K et il admettrait donc un point d'accumulation dans K. On en déduirait donc que $f^{-1}(0)$ aurait un point d'accumulation dans K et donc dans Ω, d'où une contradiction. ■

- Propriété de Moyenne.

Introduction:

Si f est une fonction holomorphe dans un ouvert Ω, alors pour tout disque fermé $\overline{D(z_0,r)} \subset \Omega$ on a:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{\leftarrow}{C(z_0,r)}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,d\zeta \quad \left(\text{d'après la formule intégrale de Cauchy}\right)$$

c'est-à-dire:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt \quad \text{en faisant } \zeta = z_0 + re^{it} \text{ avec } t \in [0,2\pi]$$

autrement dit: la valeur de f au centre du disque est donc égale à la moyenne des valeurs de f sur le cercle frontière.

Définition:

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$. Ω ouvert de $\mathbb{C}$.

f possède la propriété de moyenne dans Ω $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \cdot\ f \text{ est continue dans } \Omega \\ \cdot\ \forall\, \overline{D(z_0,r)} \subset \Omega \text{ on a} \\ f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt \end{cases}$

On peut donc dire que:

Toute fonction holomorphe dans Ω possède la propriété de moyenne dans Ω.

Théorème (principe du maximum)

Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$, Ω ouvert de $\mathbb{C}$, possède la propriété de moyenne dans Ω et $|f|$ possède un maximum rélatif en $a \in \Omega$, alors f est constante dans un voisinage de a.

Preuve :

Rappelons d'abord que "$|f|$ possède un maximum relatif en $a \in \Omega$" signifie :

(1) $\exists D(a,R) \subset \Omega$ t.q. $\forall z \in D(a,R)$

$$|f(z)| \leq |f(a)|.$$

Or, si $f(a) = 0$, on a que $f = 0$ dans $D(a,R)$, d'où le résultat.

Si $f(a) \neq 0$, soit $r \in]0,R[$. Puisque f possède la propriété de la moyenne dans Ω et que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ on a :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,dt,$$ ce qui s'écrit encore :

(2) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{f(a)}\,dt = 1$$

Posons, pour $t \in [0,2\pi]$, $g(t) = \dfrac{f(a+re^{it})}{f(a)}$.

g est continue sur $[0,2\pi]$, et d'après (1) on a :

$|g(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [0,2\pi]$.

On sait que l'intégrale (2) est égale à :

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{f(a)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(g(t))\,dt + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}(g(t))\,dt$$

Donc : $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(g(t))\,dt$, d'où on obtient :

(3) $$\int_0^{2\pi} [1 - \mathrm{Re}(g(t))]\,dt = 0$$

Or :

$\forall t \in [0, 2\pi]$, $\mathrm{Re}(g(t)) \leq |g(t)| \leq 1$ donc

$\forall t \in [0, 2\pi]$, $1 - \mathrm{Re}(g(t)) \geq 0$

En plus, la fonction $t \mapsto 1 - \mathrm{Re}(g(t))$ est continue sur $[0, 2\pi]$, donc on déduit de (3) que :

$$\forall t \in [0, 2\pi] \quad 1 - \mathrm{Re}(g(t)) = 0,$$

d'où $\mathrm{Im}(g(t)) = 0$ $\forall t \in [0, 2\pi]$, car $|g(t)| \leq 1$.

On a donc : $g(t) = 1$ $\forall t \in [0, 2\pi]$, c'est-à-dire :

$$\frac{f(a + re^{it})}{f(a)} = 1 \quad \forall t \in [0, 2\pi] \quad \forall r \in]0, R[$$

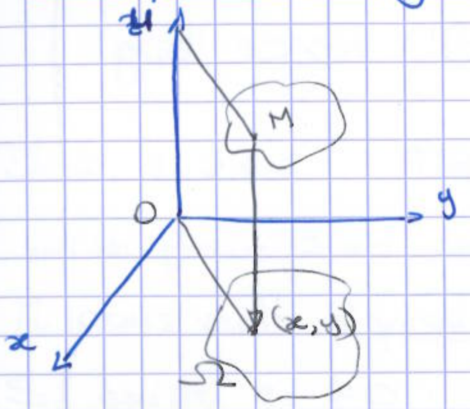
d'où on déduit : $\forall z \in D(a, R) \quad f(z) = f(a)$. ∎

Dans le cas où Ω est un domaine (ouvert et connexe) et où $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, on peut améliorer la conclusion du Théorème précédent car alors, d'après le principe du prolongement analytique, si f est constante dans un voisinage de a, f est constante dans tout Ω :

Théorème du Module Maximum

Soit f holomorphe dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$.
Si $|f|$ admet un maximum rélatif en un point $a \in \Omega$, alors f est constante dans Ω.

Interprétation géométrique :



Soit f holomorphe et non constante dans un domaine Ω, et soit :

$E = \{(x,y,u) \in \mathbb{R}^3 : u = |f(x+iy)| \text{ avec } x+iy \in \Omega\}$

Quand (x,y) décrit Ω, le point M de coordonnées (x,y,u) décrit une surface S.

Le théorème précédent signifie que S n'a pas de "sommets" (même localement).

Corollaire :

Soit f holomorphe dans Ω domaine borné, et continue dans $\overline{\Omega}$.

Alors $\forall z \in \Omega$, $|f(z)| \leq \sup\limits_{u \in \partial\Omega} |f(u)|$

avec inégalité stricte si f n'est pas constante

Remarque : si f est continue dans $\overline{\Omega}$, alors :

f constante dans $\Omega \iff f$ constante dans $\overline{\Omega}$

Preuve du Corollaire :

- Si f est constante dans Ω, alors f est constante dans $\overline{\Omega}$ et $\forall z \in \Omega \quad |f(z)| = \sup\limits_{u \in \partial\Omega} |f(u)|$, et ok.
- Si f n'est pas constante dans Ω, soit $z_0 \in \overline{\Omega}$ t.q.

$|f(z_0)| = \sup\limits_{u \in \overline{\Omega}} |f(z)|$ [z_0 existe car $|f|$ est continue sur le compact $\overline{\Omega}$]

Alors, $\forall z \in \Omega \quad |f(z)| < \sup\limits_{u \in \overline{\Omega}} |f(u)|$ car, sinon, $|f|$ aurait un maximum dans Ω et alors elle serait constante, d'après le théorème précédent.

On en déduit que $z_0 \in \partial\Omega$, d'où :

$\forall z \in \Omega \quad |f(z)| < |f(z_0)| = \sup |f(u)|$.

Lemme de Schwarz :

Soit f holomorphe dans $D(0,R)$, $R>0$ t.q.

- $f(0)=0$, et
- $\exists M>0 : \forall z \in D(0,R), |f(z)| \leq M$.

Alors :

① $\forall z \in D(0,R), \quad |f(z)| \leq \dfrac{M}{R}|z|$

② Si $\exists z_0 \neq 0$ t.q. $|f(z_0)| = \dfrac{M}{R}|z_0|$, alors $f(z) = a \cdot z$ avec $|a| = \dfrac{M}{R}$.

Preuve :

Posons $\begin{cases} g(z) = \dfrac{f(z)}{z} & \forall z \in D(0,R) \setminus \{0\} \\ g(0) = f'(0) \end{cases}$

Nous allons prouver que : g est holomorphe dans $D(0,R)$.

En fait : g est holomorphe dans $D(0,R) \setminus \{0\}$.

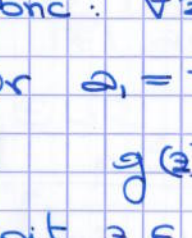
Il nous suffit donc de vérifier que g est développable en série entière en 0. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ le développement de f en 0. On a $a_0 = 0$ car $f(0)=0$.

Donc : $\forall z \neq 0$, $\dfrac{f(z)}{z} = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \cdots$

Or $a_1 = f'(0) = g(0)$. Donc $\forall z \in D(0,R)$ on a

$$g(z) = a_1 + a_2 z + a_3 z^3 + \cdots$$

Soit $z \in D(0,R)$.



$\forall r \in \left]|z|, R\right[$,

en appliquant le corollaire précédent à g qui est holomorphe dans le domaine borné $D(0,r)$ et continue dans $\overline{D(0,r)}$, on obtient :

$$|g(z)| \leq \sup_{|u|=r} |g(u)| \leq \frac{M}{r}$$

Donc, en faisant tendre r vers R on a :

$$|g(z)| \leq \frac{M}{R} \qquad \forall z \in D(0,R).$$

D'où, si $z \neq 0$: $|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z|$. Cette inégalité est vrai aussi pour $z=0$, car $f(0)=0$. $\boxed{\text{OK}}$

Il nous reste à prouver ②.

S'il existe $z_0 \neq 0$: $|f(z_0)| = \frac{M}{R}|z_0|$, alors on a : $|g(z_0)| = \frac{M}{R}$ et donc $\forall z \in D(0,R)$ $|g(z)| \leq |g(z_0)|$.

Alors, d'après le théorème du module maximum, g est constante dans $D(0,R)$. Si a désigne cette valeur constante, on a donc, pour $z \neq 0$, $f(z) = az$ et ceci est vrai aussi pour $z=0$.

Il est enfin clair que $|a| = |g(z_0)| = \frac{M}{R}$ ∎

<u>Corollaire</u> :

Soit $f : D(0,1) \longrightarrow \overline{D(0,1)}$ holomorphe t.q. $f(0)=0$.

<u>Alors</u>, $\forall z \in D(0,1)$ $|f(z)| \leq |z|$ avec égalité si et seulement si $f(z) = a \cdot z$ avec $|a| = 1$ (i.e., f est une rotation).

Théorème des Résidus

1. Développement de Laurent d'une fonction holomorphe dans une couronne.

Soient r_1 et r_2 deux nombres de $[0, +\infty]$ tels que $r_1 < r_2$, soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et soit D la couronne :
$D = \{ z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2 \}$ de centre z_0 et délimitée par les cercles $\mathcal{C}(z_0, r_1)$ et $\mathcal{C}(z_0, r_2)$.

D

Si f est une fonction holomorphe dans D, on sait que f est représentable, au voisinage de tout point de D, par une série entière.

On va trouver un développement de f valable dans toute la couronne, mais ce sera un développement en série de Laurent, c'est-à-dire de la forme :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Où : lorsque les deux séries $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ et $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ sont convergentes (et seulement dans ce cas), on désigne avec $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ la somme $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0} a_n (z - z_0)^n$.

Le point $z_0 \notin D$ donc les puissances négatives de $(z - z_0)$ sont bien définies et holomorphes dans la couronne D.

Théorème :

Soit f une fonction holomorphe dans la couronne $D = \{ z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2 \}$. **Alors** :

(i) Il existe une suite unique $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que :

$$\forall z \in D \qquad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

(ii) $\forall n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overleftarrow{\Gamma}} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} \, du$$

où Γ est un cercle quelconque, de centre z_0, inclus dans D.

Rmq : l'expression intégrale des a_n est la même que dans le cas d'un développement en série entière.

Preuve du Théorème :

Soit $z \in D$, et soient ρ_1 et ρ_2 t.q.

$$r_1 < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < r_2$$

Posons :

$\Gamma_1 = \mathcal{C}(z_0, \rho_1)$ et $\Gamma_2 = \mathcal{C}(z_0, \rho_2)$

Soit $\Delta \doteq \{ z : \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 \}$.

Δ est, évidemment, un P-domaine t.q. $\overline{\Delta} \subset D$;

f étant holomorphe dans D, la formule de Cauchy nous donne :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overleftarrow{\Gamma_2}} \frac{f(u)}{u - z} \, du + \frac{1}{2\pi i} \int_{\overrightarrow{\Gamma_1}} \frac{f(u)}{u - z} \, du$$

En raisonnant comme dans la preuve du théorème "f holomorphe $\Rightarrow$ f analytique" on vérifie que :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\overleftarrow{\Gamma_2}} \frac{f(u)}{z-u}\,du = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{avec } a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overleftarrow{\Gamma_2}} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}\,du$$

De plus, on a :

$$\int_{\overleftarrow{\Gamma_2}} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}\,du = \int_{\overleftarrow{\Gamma}} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}\,du$$ où Γ est un cercle quelconque centré en z_0 et inclus dans D. Ceci descende en effet du théorème de Cauchy appliqué à la fonction $u \mapsto \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}$ qui est holomorphe dans D, et au P-domaine égal à la couronne délimitée par les cercles Γ et Γ_2.

Quant à la seconde intégrale $\int_{\overrightarrow{\Gamma_1}} \frac{f(u)}{u-z}\,du$, un raisonnement analogue va nous conduire cette fois à un développement en série de puissances de $\frac{1}{z-z_0}$ (car z est extérieur à $D(z_0, \rho_1)$).

En fait, $\forall u \in \Gamma_1$ on a :

$$\frac{1}{z-u} = \frac{1}{z-z_0-(u-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{u-z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(u-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$\left(\text{car } \forall u \in \Gamma_1,\ \left|\frac{u-z_0}{z-z_0}\right| < 1\right)$.

La convergence normale par rapport à u sur Γ_1 de la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(u)(u-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$ se justifie sans difficulté, donc on peut intégrer terme à terme.

On obtient :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\Gamma_1}} \frac{f(u)}{u-z}\,du = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overleftarrow{\Gamma_1}} \frac{f(u)}{z-u}\,du = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\overleftarrow{\Gamma_1}} f(u)(u-z_0)^n\,du\right]\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}$$

c'est-à-dire : (en posant $n+1=p$) :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\overrightarrow{\Gamma_1}} \frac{f(u)}{u-z}\,du = \sum_{p=-1}^{-\infty} a_p (z-z_0)^p$$

$$\text{avec } a_p = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overleftarrow{\Gamma_1}} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{p+1}}\,du \qquad \forall p = -1, \dots, -\infty.$$

Comme ci-dessus, on vérifie que pour calculer a_p nous pouvons remplacer $\overleftarrow{\Gamma_1}$ par n'importe quel cercle $\overleftarrow{\Gamma}$ de centre z_0 et inclus dans D.

<u>En définitive, on a donc</u> :

$\forall z \in D, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, où les a_n ont la forme indiquée par l'énoncé du théorème.

Il nous reste à vérifier <u>l'unicité d'un tel développement</u>.

Supposons donc qu'il existe $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ t.q. $\forall z \in D$ $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$. Alors, si Γ est un cercle quelconque de centre z_0 et inclus dans D, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on a :

$$a_p = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overleftarrow{\Gamma}} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{p+1}}\,du = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overleftarrow{\Gamma}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (u-z_0)^{n-p-1}\,du$$

On vérifie aisément que chacune des deux séries $\sum_{-\infty}^{-1} c_n (u-z_0)^{n-p-1}$ et $\sum_{n\geq 0} c_n (u-z_0)^{n-p-1}$ converge normalement pour $u \in \Gamma$ et donc on peut intégrer terme à terme.

Tous les termes sont nuls sauf le terme de rang p qui est égal à c_p et donc on a que :

$$\forall p \in \mathbb{Z} \quad c_p = a_p \text{, d'où l'unicité.}$$

<u>Remarque</u>.

Pour le développement éventuel d'une fonction f en série entière en un point z_0, d'après des résultats sur les séries entières, on savait que les coefficients a_n d'un tel développement, s'il existe, sont égaux à $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, d'où l'unicité.

<u>Ici</u> il convenait de s'en assurer.

2. Comportement au voisinage de z_0 d'une fonction f holomorphe dans un disque pointé $\dot{D}(z_0, r)$.

Rappel / Notation. $\dot{D}(z_0,r) = D(z_0,r) \setminus \{z_0\}$

$= \{z : 0 < |z-z_0| < r\}$.

Soit f une fonction holomorphe dans $\dot{D}(z_0,r)$; on peut utiliser le théorème du paragraphe précédent (ici $r_1 = 0$, $r_2 = r$) et on a donc :

$\forall z \in \dot{D}(z_0,r) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$.

$\boxed{\text{Premier cas : } \forall n < 0 \quad a_n = 0}$

On a donc : $\forall z \in \dot{D}(z_0,r) : f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n$

Si on pose $f(z_0) = a_0$ (ce qui revient à définir $f(z_0)$ par continuité), $f(z)$ est alors égal à la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ dans tout $D(z_0,r)$ et par suite f est holomorphe dans $D(z_0,r)$.

On dit donc que z_0 est un point régulier pour f

Dans tous les autres cas, c'est-à-dire, si $\exists n < 0$ t.q. $a_n \neq 0$, on dira que z_0 est singulier pour f

Exemple : $f(z) = \dfrac{\sin(z)}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

On a : $f(z) = 1 + \dfrac{z^2}{3!} + \cdots$ et donc 0 est régulier.

Si on pose $f(0) = 1$, on a $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Dans l'exemple, on a vu que la fonction f holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et continue dans $\mathbb{C}$ (si on pose $f(0)=1$) est alors holomorphe dans $\mathbb{C}$.

Plus généralement, on a le résultat suivant :

héorème : Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$. $z_0 \in \Omega$.
Si f est holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$ et continue
dans Ω, alors f est holomorphe dans Ω.

euve :

i $D(z_0,r)$ est un disque inclus dans Ω, le développement
e f en $\dot{D}(z_0,r)$ ne contient pas de puissances
égatives (sinon f ne pourrait pas être continue en z_0).
'où, d'après ce qui précède, f est holomorphe dans
$D(z_0,r)$ et donc dans Ω. ■

euxième cas : Il y a un nombre fini de a_n d'indice
négatif non nuls

oit alors $q \in \mathbb{N}^*$ t.q. $a_{-q} \neq 0$ et $\forall n < -q,\ a_n = 0$.

n a :

$$z \in \dot{D}(z_0,r), \quad f(z) = \frac{a_{-q}}{(z-z_0)^q} + \frac{a_{-q+1}}{(z-z_0)^{q-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots \quad (*)$$

n dit alors que : z_0 est un pôle d'ordre q pour f,
et la fonction $z \longmapsto \frac{a_{-q}}{(z-z_0)^q} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0}$ est appelée
partie principale de f par rapport à z_0

ans ce cas, en réduisant les termes du second membre de $(*)$
u même dénominateur $(z-z_0)^q$, on constate que $f(z)$
st de la forme $\frac{g(z)}{(z-z_0)^q}$ avec g holomorphe dans $D(z_0,r)$
et $g(z_0)\ (= a_{-q}) \neq 0$

Plus généralement, on a :

Théorème : Soit Ω domaine de $\mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \Omega$.
Si $f = \frac{g}{h}$ avec g et h holomorphes et $\not\equiv 0$ dans Ω, et z_0 est un zéro d'ordre k de g et un zéro d'ordre l de h, alors :

① Si $k \geq l$, alors z_0 est régulier pour f.

② Si $k < l$, alors z_0 est un pôle de f d'ordre $l-k$.

Preuve:

Remarquons d'abord que puisque les zéros de h sont isolés, on est sûr que f soit holomorphe dans un disque $\dot{D}(z_0, R)$.

De plus, puisque les zéros de g et ceux de h sont isolés on est sûr qu'il existe $D(z_0, r) \subset \Omega$ t.q :

$$\forall z \in D(z_0, r) \quad \begin{cases} g(z) = (z-z_0)^k g_1(z) \\ h(z) = (z-z_0)^l h_1(z) \end{cases}$$

avec g_1, h_1 fonctions holomorphes et sans zéros dans $D(z_0,r)$

D'où, $\forall z \in \dot{D}(z_0,r)$, $\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{(z-z_0)^k}{(z-z_0)^l} \frac{g_1(z)}{h_1(z)}$

avec $\frac{g_1}{h_1}$ holomorphe dans $D(z_0,r)$ et $g_1(z_0) \neq 0$. Donc :

$$\forall z \in D(z_0, r) \quad \frac{g_1(z)}{h_1(z)} = \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n \quad \text{avec } a_0 \neq 0$$

$\Rightarrow$ ① et ② sont immédiates. ∎

Corollaire: Si dans le théorème précédent on a $g \equiv 1$, on déduit que:

Si h est holomorphe dans un domaine Ω et $h \not\equiv 0$, et $z_0 \in \Omega$ est zéro d'ordre l de h, alors z_0 est un pôle d'ordre l de $\frac{1}{h}$.

Troisième cas : Il y a une infinité de a_n d'indice négatif

On dit alors que : z_0 est un point singulier essentiel pour f.

Exemple : $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 \cdot 2!} + \dots \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$z = 0$ est un point singulier essentiel pour f.

3. Théorème des Résidus.

Définition d'un résidu :

Soit f une fonction holomorphe dans $\dot{D}(z_0, r)$ et supposons que z_0 soit singulier pour f.

On appelle résidu de f au point singulier z_0 le coefficient a_{-1} de son développement de Laurent dans $\dot{D}(z_0, r)$, et on le note $\text{Rés}(f, z_0)$.

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \text{Rés}(f, z_0) \doteq a_{-1}$.

D'après l'expression intégrale des coefficients du développement de Laurent de f, on a donc :

$$\boxed{a_{-1} = \text{Rés}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\overleftarrow{\Gamma}} f(z)\, dz \quad \text{où } \Gamma \text{ est un cercle quelconque de centre } z_0 \text{ et inclus dans } \dot{D}(z_0, r)}$$

Remarque : on pourrait définir le résidu de f en un point régulier : il serait toujours nul.

Donc, le calcul d'une intégrale peut être ramené à un calcul de résidus.

I Calcul Pratique des Résidus

1. Cas d'un pôle simple z_0

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots \quad \text{pour } z \in \dot{D}(z_0,r)$$

on a alors: $\boxed{a_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)}$

Lemme:

Si $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ avec $\begin{cases} g \text{ et } h \text{ holomorphes dans } D(z_0,r) \\ g(z_0) \neq 0 \\ h(z_0) = 0 \text{ et } h'(z_0) \neq 0 \end{cases}$

alors z_0 est un pôle simple de f et $\text{Rés}(f, z_0) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

Preuve: z_0 n'annule pas $g(z)$ et est un zéro simple de h, donc z_0 est un pôle simple de f.

Remplaçons g et h par leur développement en z_0. Il vient:

$$f(z) = \frac{g(z_0) + g'(z_0)(z-z_0) + \cdots}{h'(z_0)(z-z_0) + \cdots}$$

d'où $\text{Rés}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

2. Cas d'un pôle d'ordre $k > 1$:

Pour $z \in \dot{D}(z_0, r)$:

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

donc, a_{-1} est le coefficient de $(z-z_0)^{k-1}$ dans le développement en puissances de $(z-z_0)$ de $(z-z_0)^k f(z)$.

Il est utile, en général, de poser $z = z_0 + t$ et de développer suivant les puissances de t.

Théorème Fondamental.

Soit Ω domaine.

Soit f holomorphe dans $\Omega \setminus \{$points singuliers pour $f\}$

Soit Δ un (P)-domaine t.q. :

(i) $\overline{\Delta} \subset \Omega$

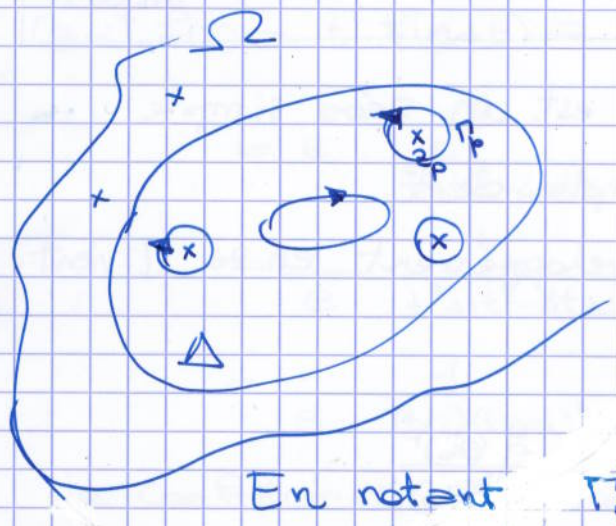
(ii) $\partial\Delta$ ne contient aucun point singulier de f

(iii) Δ ne contient qu'un nombre fini de point singuliers $z_1, .., z_k$ de f.

Alors :

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{p=1}^{k} \text{Rés}(f, z_p).$$

Preuve :



Soit, pour chaque $p = 1, .., k$ D_p un disque de centre z_p t.q

- chaque $\overline{D_p}$ est inclus dans Δ
- les $\overline{D_p}$ sont disjoints 2 à 2.

Alors : $\Delta \setminus \bigcup_{p=1}^{k} \overline{D_p}$ est un (P)-domaine dont l'adhérence est contenu dans $\Omega \setminus \{$points singuliers de $f\}$.

En notant Γ_p le cercle frontière de D_p, d'après le théorème de Cauchy on a :

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz + \int_{\overrightarrow{\Gamma_1}} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\overrightarrow{\Gamma_k}} f(z)\,dz = 0$$

c'est-à-dire : $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = \int_{\overleftarrow{\Gamma_1}} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\overleftarrow{\Gamma_k}} f(z)\,dz$

mais $\forall\, p = 1, .., k$ on a :

$$\int_{\overleftarrow{\Gamma_p}} f(z)\,dz = 2\pi i \,\text{Rés}(f, z_p)$$ d'où le résultat. ∎

Exemple :

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$$

$g(z) = e^{iz}$ est toujours $\neq 0$.

$h(z) = z(z+i)^2(z-i)^2$ a : 0 comme zéro simple

$\pm i$ comme zéros doubles

Donc : 0 est un pôle simple de f, et $+i$ et $-i$ sont des pôles doubles pour f.

On a : $h'(0) = 1$ $g(0) = 1$ $\Rightarrow$ $\text{Rés}(f, 0) = \frac{g(0)}{h'(0)} = 1$.

Calculons $\text{Rés}(f, i)$:

$(z-i)^2 f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}$. On pose $z = i+t$ et on développe suivant les puissances de t :

$$(z-i)^2 f(z) = t^2 f(i+t) = \frac{e^{i(i+t)}}{(i+t)(2i+t)^2}$$

$$= e^{-1} \cdot \frac{e^{it}}{(i+t)(-4+t^2+4it)} = \frac{1}{e} \frac{e^{it}}{-4i+it^2-4t-4t+t^3+4it}$$

$$= \frac{1}{e} \frac{e^{it}}{t^3+it^2-8t+4it-4i}$$

$$= \frac{1}{e} \frac{1}{(t+i)(t+2i)^2} \cdot \left(1 + it + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \frac{(it)^4}{4!} + \dots\right)$$

le coefficient de t, qui est $-\frac{3}{4e}$ est $\text{Rés}(f, i)$.

3. Cas d'un point essentiel : il n'y a pas de règle simple.

1. Calcul d'Intégrales par la méthode des Résidus.

On se propose de calculer des intégrales définies sans expliciter une primitive de la fonction sous signe d'intégration, mais en utilisant le théorème des résidus.

Il n'y a pas de méthode générale pour traiter ce problème et nous allons nous borner à considérer quelques type classique et à voir, pour chacun d'eux, quel est le procédé pour se ramener à un calcul de résidus.

1er type:

Considerons une intégrale de la forme

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin(t), \cos(t))\, dt$$

où $R(x,y)$ désigne une fonction rationnelle n'ayant pas de pôle sur le cercle $x^2+y^2=1$. Posons $e^{it}=z$; lorsque t croît de 0 à 2π, z décrit le cercle unité.

Donc I est égal au produit par $2\pi i$ de la somme des résidus de la fonction

$$\frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) \quad (*)$$

aux pôles contenus dans le disque unité, c'est-à-dire:

$$I = 2\pi \sum_{\substack{p \text{ pôle} \\ p\in D(0,1)}} \text{Rés}\left(\frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right), p\right).$$

(*) En fait $dt = \frac{dz}{iz}$, $\sin(t) = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$ et $\cos(t) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, donc

$$I = \int_{C} \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) dz = 2\pi \sum_{\substack{\text{pôles} \\ \in D(0,1)}} \text{Rés}\left(\frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\right).$$

Exemple : $I = \int_0^{...} \frac{dt}{a+\sin(t)}$ avec $a > 1$.

On pose $z = e^{it}$, d'où $dt = \frac{dz}{iz}$, $\sin(t) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$, et donc

$$I = \int_{C(0,1)} \frac{2\,dz}{z^2 + 2iaz - 1} = 2\pi \sum_{\substack{p \text{ pôle} \\ p \in D(0,1)}} \text{Rés}\left(\frac{2i}{z^2+2iaz-1}, p\right).$$

Or, le seul pôle z_0 contenu dans le disque unité est
$z_0 = -ia + i\sqrt{a^2-1}$ et c'est un pôle simple.

$$\Rightarrow \text{Rés}\Big(\underbrace{\frac{2i}{z^2+2iaz-1}}_{\frac{g}{h}}, z_0\Big) = \frac{2i}{2z_0 + 2ia} = \frac{\cancel{2i}}{-\cancel{2ia} + \cancel{2i}\sqrt{a^2-1} + \cancel{2ia}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$$

$h' = 2z + 2ia$

et donc $I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

2^e type :

On aura besoin des lemmes suivantes:

Lemme 1 :

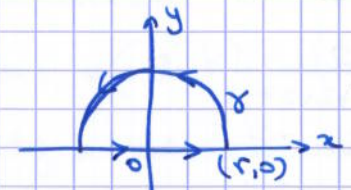
Soit f continue pour $|z| > R_0$ et telle que $\lim_{|z_0| \to +\infty} z f(z) = 0$.
Alors $\int_{\Gamma(R)} f(z)\,dz$ tend vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$, où
$\Gamma(R) = \{z \mid |z| = R, \ \theta_1 \leq \text{Arg}(z) \leq \theta_2\}$.

Lemme 2 :

Soit f continue dans $\dot{D}(z_0, R_0)$ et telle que $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$.
Alors $\int_{\gamma(r)} f(z)\,dz$ tend vers 0 lorsque r tend vers 0,
où $\gamma(r) = \{z \mid |z - z_0| = r, \ \theta_1 \leq \text{Arg}(z - z_0) \leq \theta_2\}$.

Nous allons donc considérer une intégrale de la forme
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$$
où R est une fonction rationnelle <u>n'ayant pas de pôle réel</u>
et telle que $\lim_{|x| \to \infty} x R(x) = 0$.

Pour calculer I, on va integrer la fonction $R(z)$ de la variable complexe z sur le bord γ d'un demi-disque de centre O et rayon r, situé dans le demi-plan $y \geq 0$:



Pour r assez grand, $R(z)$ est holomorphe sur le bord γ et donc : $\int_{\overleftarrow{\gamma}} R(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{p \text{ pôle} \\ p \in \text{Demi-disque}}} \text{Rés}(R, p)$

Donc on a:

$$\int_{-r}^{r} R(x)\,dx + \int_{\overleftarrow{\Gamma(r)}} R(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{p \text{ pôle} \\ p \in \text{Demi-disque}}} \text{Rés}(R(z), p)$$

où $\Gamma(r)$ est la demi-circonference de centre O et rayon r parcourue dans le sens direct.

D'après les lemmes on a:

$$\lim_{r \to +\infty} \left[\int_{\overleftarrow{\Gamma(r)}} R(z)\,dz \right] = 0$$

et donc:

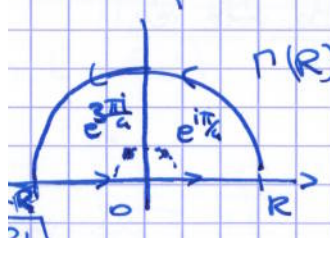
$$I = \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} R(x)\,dx = +2\pi i \sum_{\substack{p \text{ pôle} \\ p \in \text{Demi-plan} \\ \text{supérieur } \{y>0\}}} \text{Rés}(R(z), p).$$

$$= -2\pi i \sum_{\substack{q \text{ pôle} \\ q \in \text{Demi-plan} \\ \text{inferieur } \{y<0\}}} \text{Rés}(R(z), q)$$

Exemple: Nous voulons calculer:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$$

Remarquons d'abord que cette intégrale existe.



Considérons la fonction définie par

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$$

f est holomorphe dans $\mathbb{C}$ privé des points :

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)} \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

qui sont des pôles simples pour f.

On a donc :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = 2\pi i \left[\text{Rés}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, e^{i\pi/4}\right) + \text{Rés}\left(\frac{z^2}{1+z^4}, e^{\frac{3\pi i}{4}}\right)\right]$$

<u>Or</u> : $g = z^2 \quad h = 1+z^4 \quad h' = 4z^3 \quad : \quad f = \frac{g}{h}$

$$\text{Rés}\left(f, e^{i\pi/4}\right) = \frac{e^{\frac{2\pi i}{4}}}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}} = \frac{1}{4e^{\frac{i\pi}{4}}}$$

$$\text{Rés}\left(f, e^{\frac{3\pi i}{4}}\right) = \frac{e^{\frac{3\pi i\cdot 2}{4} - \frac{9\pi i}{4}}}{4} = \frac{1}{4e^{3\pi i/4}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi i}{4} \cdot \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}} + e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{\frac{4\pi i}{4}}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

<u>3e type</u> : On se propose d'étudier les intégrales de la forme :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx$$

où $f(z)$ est une fonction holomorphe au voisinage de tout point du demi-plan fermé $y \geq 0$, sauf peut-être pour un nombre <u>fini</u> de points.

$\boxed{1^{er}\text{ cas}}$: les points singuliers ne sont pas sur l'axe réel ; donc l'intégrale $\int_{-r}^{r} f(x) e^{ix}\,dx$ a un sens et, pour $r \to +\infty$, sa valeur tend vers I qui est convergente. On a :

Proposition :

Si $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ pour $y \geq 0$, alors :

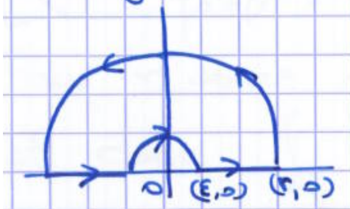
$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{p \text{ pôle} \\ p \in \{y>0\}}} \text{Rés}\left(f(z)e^{iz}, p\right).$$

<u>Exemple</u> :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\,\text{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,dx\right) = \pi i \sum_{\substack{p \text{ pôle} \\ p \in \{y>0\}}} \text{Rés}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1}, p\right) = \frac{\pi}{2e}.$$

car il y a un seul pole $z=i$, qui est simple avec $\text{Rés}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+1}, i\right) = \frac{1}{2ie}$

$\boxed{2^e \text{ cas:}}$ $f(z)$ possède des points singuliers sur l'axe réel.
Nous allons nous borner à un exemple, celui où $f(z)$ a un pôle simple à l'origine - Dans ce cas, il convient de modifier le chemin d'intégration pour contourner l'origine le long d'un demi-cercle $\gamma(\varepsilon)$ de rayon $\varepsilon > 0$ petit :



__Lemme__: Si $z_0 = 0$ est un pôle simple de $g(z)$, on a:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} g(z)\, dz = \pi i \, \mathrm{Res}(g, 0)$$

où $\gamma(\varepsilon)$ est parcouru dans le sens des arguments croissants.

On appliquera ce lemme à la fonction $g(z) = f(z)\, e^{iz}$.

__Exemple__:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \frac{\pi}{2} \, \mathrm{Rés}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0 \right) = \frac{\pi}{2}$$

__Remarque importante__:
Si au lieu de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx$, on avait eu $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ix}\, dx$, il eût fallu intégrer __dans le demi-plan inférieur__.
Plus en général, une intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ax}\, dx$ se calculera en intégrant dans le demi-plan où $|e^{ax}| \leq 1$.

__On n'oubliera jamais que__: __sin z et cos z ne sont bornés dans aucun demi-plan__. Donc pour calculer une intégrale de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin^n(x)\, dx$, ou $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos^n(x)\, dx$ on passera toujours à travers de l'exponentielle complexe, pour appliquer la méthode précédente.

Il y a aussi des autres cas où on est capable à calculer des intégrales reeles <u>via</u> le calcul des résidus, mais on n'a pas les outils pour les traiter. Vous pouvez voir le livre [H. Cartan "Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes", Hermann, pp. 100-109].

Compléments :

Logarithme complexe :

Logarithme principal

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, et cherchons les nombres complexes $U = X + iY$ t.q. $e^U = z$.

On a : $e^U = z \iff e^X e^{iY} = z \iff \begin{cases} e^X = |z| \\ \text{et} \\ Y = \arg(z) \pmod{2\pi} \end{cases}$

Donc, si $z = 0$, il n'existe aucun U t.q. $e^U = 0$, mais pour $z \neq 0$ on a :

$$\boxed{e^U = z \iff U = \log|z| + i(\arg(z) + 2k\pi) \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}}$$

et à chaque $z \neq 0$ correspondent une infinité de nombres complexes U t.q. $e^U = z$.

Pour définir une application faisant correspondre, à chaque $z \neq 0$, un seul nombre complexe U t.q. $e^U = z$, il nous faut choisir, d'une part une détermination de $\arg(z)$, et d'autre part un $k \in \mathbb{Z}$.

Nous pouvons prendre, par exemple, $k = 0$ et la détermination, que nous noterons $\mathrm{Arg}(z)$, de l'argument de z telle que $\mathrm{Arg}(z) \in]-\pi, +\pi]$. Cela nous donne :

$\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ déf par :

Logarithme Principal $\boxed{\mathrm{Log}(z) = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z) \quad \forall z \neq 0}$

Prop : $\mathrm{Log}(z)$ est continue dans $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ et dérivable dans $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ avec dérivée $\frac{1}{z}$.

Théorème :

La fonction $u \mapsto e^u$ est holomorphe et injective dans $\{x + iy : -\pi < y < +\pi\}$ avec inverse $z \mapsto \mathrm{Log}(z) = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$, qui est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, et $(\mathrm{Log}(z))' = \frac{1}{z}$.

Théorème de Rouché :

Prop:

Soit f holomorphe dans un domaine Ω. Soit Δ un (P)-domaine t.q. $\overline{\Delta} \subset \Omega$ et f ne s'annule pas sur $\partial\Delta$.

Alors : le nombre des zéros de f dans Δ comptés avec leur multiplicités est égal à $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} \frac{f'(u)}{f(u)}\,du$.

Théorème de Rouché :

Soient f et g holomorphes dans Ω domaine.

Soit Δ un (P)-domaine t.q. $\overline{\Delta} \subset \Omega$ et supposons que :

$\forall z \in \partial\Delta \quad |f(z)| < |g(z)|$.

Alors: g et $f+g$ ont le même nombre de zéros dans Δ.