

TD 4. Zéros de fonctions holomorphes

Exercice 1. Soit $f(z) = \sin\left(\frac{1}{e^z + e}\right)$.

- (1) Quel est le plus grand ouvert U sur lequel f est holomorphe ?
- (2) Trouver les zéros de f .
- (3) Montrer que cet ensemble possède un point d'accumulation dans \mathbb{C} .

Exercice 2. Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \rightarrow +\infty$ quand $|z| \rightarrow +\infty$. Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros.

Exercice 3. Soit $f(z) = \sin\frac{\pi}{1-z}$. Montrer que f est analytique sur le disque ouvert $|z| < 1$. Quels sont les zéros de f sur ce disque ? Est-ce contradictoire avec le principe des zéros isolés ?

Exercice 4. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

- (1) Montrer que, pour tout $0 \leq r < R$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

- (2) En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq M(r)^2,$$

où $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, et que pour tout $n \geq 0$, on a l'inégalité de Cauchy $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$.

- (3) On suppose que $R = +\infty$ et qu'il existe un entier $k \geq 0$ et des constantes $c \geq 0$, $r_0 \geq 0$ tels que $M(r) \leq cr^k$ pour tout $r \geq r_0$. Montrer que f est un polynôme de degré $\leq k$.

Exercice 5. Soit f une fonction continue sur le disque fermé $\overline{D}(0, 1)$, analytique sur le disque ouvert $D(0, 1)$ et nulle sur le demi-cercle $\text{Im}(z) \geq 0$. Montrer que f est nulle. *Indication : on pourra considérer $g(z) = f(z)f(-z)$.*

Exercice 6. Soient f et g deux fonctions entières, c'est-à-dire développables en séries entières sur \mathbb{C} entier. On suppose que

$$|f(z)| \leq |g(z)| \text{ pour tout } z.$$

Quelle conclusion peut-on en tirer ?

Exercice 7 (*). Soit $(\lambda_k)_{k \geq 0}$ une suite de nombres complexes.

- (1) Montrer que s'il existe une fonction entière non identiquement nulle dont les zéros sont exactement les λ_k comptés avec multiplicité, alors il faut nécessairement que $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda_k| = +\infty$.

- (2) Montrer que si f est entière et non constante sur \mathbb{C} , alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $f^{-1}(\lambda)$ est au plus dénombrable.
- (3) Donner des exemples de fonctions entières ayant aucun, un nombre fini, ou une infinité de 0 sur \mathbb{C} .

Exercice 8 (*). On définit les opérateurs différentiels $\partial = \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ et $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$.

- (1) Calculer $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z^k \bar{z}^m)$ pour $k, m \in \mathbb{N}$. En déduire qu'un polynôme des deux variables réelles x et y à coefficients complexes $P(x, y) = \sum_{k, m=0}^N \beta_{k, m} x^k y^m$ définit une fonction holomorphe sur \mathbb{C} si, et seulement si, il s'écrit sous la forme $P(x + iy) = \sum_n a_n (x + iy)^n$, où les a_n sont des nombres complexes (que l'on ne demande pas de calculer en fonction des $\beta_{k, m}$).
- (2) Soit f une fonction de classe C^2 (au sens réel) sur un ouvert D de \mathbb{C} . Montrer que

$$4\partial\bar{\partial}f = \Delta f \text{ sur } D,$$

où Δ est l'opérateur laplacien. En déduire que si f est holomorphe sur D , alors

$$\Delta \operatorname{Re} f \equiv \Delta \operatorname{Im} f \equiv 0 \text{ sur } D.$$

- (3) Soient Ω un domaine de \mathbb{C} et $f, g \in \mathcal{H}ol(\Omega)$. Vérifier que

$$\partial\bar{\partial}(f\bar{g}) = f'\bar{g}'.$$

En déduire que si $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ sont telles que $|f_1|^2 + \dots + |f_n|^2$ est constante sur Ω , alors chacune des fonctions f_k doit être constante sur Ω .