

TD 1. Séries entières

Exercice 1. (1) Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} z^n$?
(2) Calculer la somme pour z dans le disque ouvert $D(0, R)$.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ où :

$$(1) a_n = n^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}; \quad (2) a_n = n!; \quad (3) a_n = \begin{cases} \frac{(-2)^n}{n+1} & \text{si } n = 3m + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(4) a_n = \frac{n^\alpha}{n!}, \alpha > 0; \quad (5) a_n = \frac{1 + a^n}{n}, a > 0.$$

Exercice 3. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Déterminer le rayon de convergence R' de la série $\sum b_n z^n$ dans les cas suivants :

$$(1) b_n = a_n^2 \qquad (2) b_n = a_n f(n), \text{ où } f \neq 0 \text{ est une fraction rationnelle.}$$

$$(3) b_{2n} = a_n \text{ et } b_{2n+1} = 0 \qquad (4) b_n = \frac{a_n}{n!}$$

Exercice 4. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Montrer que la série entière $\sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$ admet le même rayon de convergence.

Exercice 5. Montrer que la fonction définie par la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ est injective sur le disque $D(0, 2/3)$. *Indication :* Remarquer que pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,

$$z^n - w^n = (z - w)(z^{n-1} + z^{n-2}w + \dots + zw^{n-2} + w^{n-1}).$$

Exercice 6. Développement limité des fonctions réelles $e^x, \cos x, \sin x$ et $\log(1-x)$. Calculer le rayon de convergence des séries entières associées.

Exercice 7 (*). Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $f(x) = e^{-1/x^2}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} mais n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 8 (*). (Somme d'Abel) Soient $(u_n), (v_n)$ des suites de nombres complexes. On pose $S_k^m = v_k + \dots + v_m$.

(1) Montrer que pour $m < n$, on a

$$\sum_{k=m}^n u_k v_k = u_m S_m^n + \sum_{k=m+1}^n (u_k - u_{k-1}) S_k^n.$$

(2) Si de plus (u_n) est réelle et décroissante vers 0, et que la suite des sommes partielles $\sum_1^k v_n$ est bornée, en déduire que la série de terme général $u_n \cdot v_n$ est convergente.

Exercice 9 (*). Calculer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$$

et montrer que la série converge pour tout z tel que $z \neq \frac{1}{4}$ et $|z| = \frac{1}{4}$.