

---

**TD 6: Formes bilinéaires, formes quadratiques, coniques**

---

**Exercice 1** Les formes suivantes sont-elles bilinéaires, symétriques, définies, positives ?

1.  $b_1(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_1 - x_2y_2 - x_1y_2; x, y \in \mathbb{R}^2$ .
2.  $b_2(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1; x, y \in \mathbb{R}^2$ .
3.  $b_3(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt; f, g \in C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ .

**Exercice 2** Trouver une base orthogonale pour les formes bilinéaires symétriques suivantes :

1.  $b_4(x, y) = -x_1y_1 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_1y_2; x, y \in \mathbb{R}^2$ .
2.  $b_5(x, y) = -2x_2y_1 + 4x_2y_2 - 2x_1y_2; x, y \in \mathbb{R}^2$ .
3.  $b_6(x, y) = x_2y_1 + x_1y_2; x, y \in \mathbb{R}^2$ .

**Exercice 3** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel euclidien de dimension finie. Soient  $u$  un endomorphisme de  $E$  et  $F$  un sous-espace de  $E$ . Montrer que :

$$u(F^\perp) \subset F^\perp \Leftrightarrow u^*(F) \subset F.$$

**Exercice 4** Diagonaliser les endomorphismes auto-adjoints de  $\mathbb{R}^2$  suivants et donner à chaque fois une base constituée de vecteurs propres :

1.  $f(x, y) = (x - 3y, -3x + 2y)$ ;
2.  $g(x, y) = (8x + y, x - 4y)$ ;
3.  $h(x, y) = (x - 2y, -2x + 5)$ .

**Exercice 5** Trouver de 3 manières différentes la signature des formes quadratiques suivantes :

1.  $q_1(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ ;
2.  $q_2(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ ;
3.  $q_3(x) = 9x_1^2 - 10x_1x_2 + 4x_2^2$ ;
4.  $q_4(x) = x_1^2 + 2x_1x_2$ ;
5.  $q_4(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$ .

**Exercice 6** Soient  $F$  et  $F'$  deux polynômes de degré 2 sur  $\mathcal{E}$  un plan réel affine. Montrer que la relation suivante :

$$F \sim F' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, F' = \lambda F$$

est une relation d'équivalence.

**Exercice 7** Pour les coniques suivantes, déterminer si elles ont un centre. Quel est leur nature ? Donner leurs axes de symétrie.

1.  $(C_1) : x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x - 6y - 14 = 0$ ;
2.  $(C_2) : 25x^2 + y^2 + 10x - 10y + 30 = 0$ ;
3.  $(C_3) : 3x^2 + 2y^2 + 18x + 4y + 5 = 0$ ;
4.  $(C_4) : 2x^2 + 2y^2 + 4xy - 16x - 17y + 16 = 0$ ;
5.  $(C_5) : 2x^2 + y^2 + 3xy - 4x - 5y = 0$ ;
6.  $(C_6) : x^2 + y^2 + 2xy - 2x + 2y + 3 = 0$ ;
7.  $(C_7) : -x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$ ;
8.  $(C_8) : x^2 + 2y^2 + 2xy - 2x + 3 = 0$ .