

---

**TD 4: Plan affine euclidien, sous-espaces affines, applications affines**

---

**Exercice 1** Soit  $E$  un plan vectoriel euclidien. Montrer le théorème de Pythagore :

$$\forall x, y \in E, x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2.$$

**Exercice 2** Soit  $\mathcal{E}$  un plan affine et  $\mathcal{F}$  une partie non-vide de  $\mathcal{E}$ . Montrer que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  ssi tout barycentre de points pondérés de  $\mathcal{F}$  est un élément de  $\mathcal{F}$ .

**Exercice 3** Soit  $\mathcal{E}$  un plan affine.

1. Montrer que, par tout point de  $\mathcal{E}$ , il passe une unique droite de direction donnée.
2. Montrer que par deux points, il passe une et une seule droite.

**Exercice 4** Soient  $\mathcal{E}$  un plan affine et  $A, B, C, D \in \mathcal{E}$  quatre points distincts. On dit que  $(A, B, C, D)$  est un *parallélogramme* si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .

Montrer que  $(A, B, C, D)$  est un parallélogramme ssi  $\{A, C\}$  et  $\{B, D\}$  ont même milieu.

**Exercice 5** Montrer que l'ensemble :

$$\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}.$$

est un espace affine. Quel est son espace vectoriel associé ?

**Exercice 6** Soient  $\mathcal{E}$  un plan affine et  $A, B$  deux points distincts de  $\mathcal{E}$ . Déterminer l'ensemble des  $M \in \mathcal{E}$  tels que  $d(A, M) = d(B, M)$ .

**Exercice 7** Montrer que  $f \in \text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$  est une translation ssi  $\vec{f} = id_{\vec{\mathcal{E}}}$ .

**Exercice 8** Soient  $\mathcal{E}$  un plan affine et  $\mathcal{F}$  un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ . Soit  $\mathcal{G}$  un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  tel que  $\vec{\mathcal{G}}$  soit un supplémentaire de  $\vec{\mathcal{F}}$  dans  $\vec{\mathcal{E}}$ .

1. Montrer que, pour tout  $M \in \mathcal{E}$ , il existe  $M' \in \mathcal{E}$  tel que  $\mathcal{F} \cap (M + \vec{\mathcal{G}}) = \{M'\}$ .
2. Montrer que l'application suivante :

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{F} \\ M &\mapsto M' \end{aligned}$$

est une application bien définie et affine. On appelle  $\pi$  la *projection sur  $\mathcal{F}$  parallèlement à  $\mathcal{G}$* .

3. Montrer que  $f \in \text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$  est une projection ssi  $f \circ f = f$ .

**Exercice 9** Soit  $E$  un plan affine. Nous allons montrer le théorème de Thalès.

Soient  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$  trois droites parallèles distinctes et  $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$  deux droites telles que  $\vec{\mathcal{D}} \not\subset \vec{\mathcal{D}}_1$  et  $\vec{\mathcal{D}}' \not\subset \vec{\mathcal{D}}_1$ . Montrer que :

1.  $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_i = \{M_i\}, i \in \{1, 2, 3\}$ .
2.  $\mathcal{D}' \cap \mathcal{D}_i = \{M'_i\}, i \in \{1, 2, 3\}$ .
3. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{M_1M_2} = \lambda \overrightarrow{M_1M_3}$ , alors  $\overrightarrow{M'_1M'_2} = \lambda \overrightarrow{M'_1M'_3}$ .

**Exercice 10** On garde les hypothèses et notations de l'Exercice 8. Pour  $M \in \mathcal{E}$ , on note :

$$s(M) = M + 2\overrightarrow{M\pi(M)}.$$

1. Montrer que  $s$  est une application affine appelée la *symétrie affine par rapport à  $\mathcal{F}$  parallèlement à  $\mathcal{G}$* .
2. Montrer que  $f \in \text{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$  est une symétrie ssi  $f \circ f = id_{\mathcal{E}}$ .

**Exercice 11** Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on note  $\mathbb{P}GL_2(\mathbb{K})$  l'ensemble des fractions rationnelles (quotient de deux polynômes) de la forme :

$$\frac{aX + b}{cX + d};$$

où  $ad - bc \neq 0$ .

Montrer que c'est un groupe isomorphe à  $GL_2(\mathbb{K})/\mathbb{K}^*$ , on l'appelle le *groupe des homographies*.

**Exercice 12** Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré  $\geq 2$ . Montrer que, dans  $\mathbb{C}$ , l'ensemble des racines de  $P'$  est contenu dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des racines de  $P$  (Théorème de Lucas).