Feuille de TD n^{o}3 - Séries de Fourier

1) Soit f une fonction à valeurs réelles et continue par morceaux de période 2π. On pose

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\exp(-int)dt \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \quad \forall n \geqslant 0 \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt \quad \forall n \geqslant 1$$

(a) Si f est paire, montrer que $b_n(f) = 0$.

(b) Si f est impaire, montrer que $a_n(f) = 0$.

(c) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k(f)\exp(ikt) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt))$$

Le cours étudie plusieurs modes de convergence de cette série de fonctions.
En cas de convergence simple la fonction somme de la série de Fourier est notée

$$S(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\exp(int) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt))$$

2) On note $C^0(2\pi)$ l'espace des fonctions continues 2π périodiques à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On munit cet espace du produit scalaire $< f, g >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$ et de la norme $\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt}$.
Pour $n \in \mathbb{Z}$ on note $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad t \mapsto e^{int}$ et $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré $\leqslant n$ c'est-à-dire l'espace vectoriel $Vect(e_{-n}, \dots, e_n)$.

(a) (i) Ecrire la forme générale d'un polynôme trigonométrique de degré $\leqslant n$.

(ii) Montrer que la famille $\mathcal{B}_n = (e_{-n}, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de $\mathcal{P}_n$

(iii) Soit $P \in \mathcal{P}_n$. Exprimer les coordonnées de P dans $\mathcal{B}_n$ à l'aide de produits scalaires. Soit $(P, Q) \in \mathcal{P}_n^2$. Exprimer le produit scalaire $\langle P, Q\rangle$ et la norme de P.

Pour $f \in C^0(2\pi)$, $S_n(f)$ désigne la somme partielle de la série de Fourier de f.

(b) (i) Exprimer $S_n(f)$ dans la base $\mathcal{B}_n$ (coordonnées à l'aide de coefficients de Fourier puis de produits scalaires)

(ii) Montrer que $f - S_n(f)$ est orthogonal à tout polynôme $P \in \mathcal{P}_n$. Que peut-on en déduire concernant $S_n(f)$?

(iii) Pour $P \in \mathcal{P}_n$, exprimer $\|f - P\|^2$ en fonction de $\|f - S_n(f)\|^2$.

(iv) En déduire que $S_n(f)$ est le polynôme trigonométrique de degré $\leqslant n$ le plus proche de f au sens de la distance quadratique définie par $d(f, g) = \|f - g\|_2$.

3) Dans les exemples suivants, calculer les coefficients de Fourier (réels ou complexes) de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et telle que $\forall x \in]-\pi, \pi[$

$$(a)\; f(x) = |x|, \qquad (b)\; f(x) = \mathrm{sh}(x), \qquad (c)\; f(x) = x^2, \qquad (d)\; f(x) = e^{i\alpha x} \text{ pour } \alpha \notin \mathbb{Z}.$$

4) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire et 2π périodique, telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ -1 & \text{si } x \in]\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

(a) Calculer les coefficients de Fourier réels de f et étudier la convergence de la série de Fourier obtenue.

(b) En déduire la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

5) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π périodique, telle que $f(x) = x(2\pi - x)$ sur $]0, 2\pi[$.

(a) Développer f en série de Fourier.

(b) En déduire la somme des séries :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

6) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique, telle que $f(x) = e^{i\alpha x}$ sur $]-\pi, \pi[$ (ses coefficients de Fourier ont étés calculés à l'exercice 3).

(a) En déduire la somme des séries : $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha+n)^2}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2}.$

(b) On suppose maintenant $\alpha \in \mathbb{Z}$. Déterminer la série de Fourier de f.

7) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, de classe C^1 et telle que $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.

(a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx.$

(b) Déterminer les cas où il y a égalité.

8) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π périodique, telle que $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$ (ses coefficients de Fourier ont étés calculés à l'exercice 3).

(a) Soit $a > 0$ et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $g(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nt)}{n^2 + a^2}$.

Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $h = f - 4g$. Montrer que h est C^2 sur $\mathbb{R}$, puis que g est C^2 sur $[-\pi, \pi]$.

(c) En déduire que pour $t \in [-\pi, \pi]$, $\frac{1}{2} = g''(t) - a^2 g(t)$. Calculer explicitement g.

9) Régularité et décroissance des coefficients

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,une application continue et 2π-périodique.

(a) Démontrer que $(c_n(f))$ tend vers 0 lorsque $|n|$ tend vers $+\infty$

(b) On suppose que f est $\mathcal{C}^k$. Etablir une relation entre les coefficients de Fourier de f et ceux de $f^{(k)}$.

(c) En déduire que si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $c_n(f) = o(1/n^k)$ pour tout entier k.

(d) Réciproquement, on suppose que $c_n(f) = o(1/n^k)$ quand $|n| \to +\infty$ pour tout entier k et on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$.

  (i) Démontrer que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner les coefficients de Fourier de S.

  (ii) En utilisant le théorème de Parseval, démontrer que deux fonctions continues qui ont les mêmes coefficients de Fourier sont égales.

  (iii) En déduire que $f = S$ et donc que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(e) Quel théorème a-t-on démontré dans cet exercice ?

10) Soit f continue, 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Montrer que la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$.

11*) Soit $E = \{f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f\ C^1,\ f(0) = f(1) = 0\}$. Le but de cet exercice est de calculer

$$\lambda = \inf_{f \in E \setminus \{0\}} \frac{\int_0^1 |f'|^2}{\int_0^1 |f|^2}$$

(a) Par un choix de $f \in E$ approprié, montrer que $\lambda \leq \pi^2$.
Dans toute la suite, pour $f \in E$, on prolonge f par symétrie par rapport à l'origine, puis par 2-périodicité pour obtenir la fonction g.

(b) Montrer que g est continue.

(c) En explicitant la valeur de g sur $[-1,0]$ et sur $[0,1]$ montrer que g est C^1 sur $]-1,1[$.

(d) En explicitant la valeur de g sur $[0,1]$ et sur $[1,2]$ montrer que g est C^1 sur]0,2[.

(e) En déduire que g est C^1 sur $\mathbb{R}$.

(f) Donner une relation entre les coefficients de Fourier complexes de g, $C_p(g)$ et ceux de g', $C_p(g')$ pour $p \in \mathbb{Z}$.

(g) Montrer

$$\int_0^1 |f|^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 |g|^2, \qquad \int_0^1 |f'|^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 |g'|^2.$$

(h) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f^2$ et $\displaystyle\int_0^1 (f')^2$ en fonction des coefficients $C_p(g)$ pour $p \in \mathbb{Z}$.

(i) En déduire que pour tout $f \in E$, $\displaystyle\int_0^1 |f'|^2 \geq \pi^2 \int_0^1 |f|^2$.

(j) En déduire la valeur de λ.