Diagonalisation des endomorphismes auto-adjoints d'un espace euclidien.

On va montrer que : tout matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$

Rmq : une matrice réelle n'est pas toujours diagonalisable, et même si diagonalisable, alors pas forcement dans $\mathbb{R}$, car elle peut avoir des valeurs propres complexes.

Rappel.

Déf : $(E, <,>)$ espace euclidien. $<X, Y> = {}^tXY$ dans une base orthonormale. $f : E \to E$ endomorphisme.

Il existe un et un seul endomorphisme $f^* : E \to E$ t.q. $<f(X), Y> = <X, f^*(Y)>$ $\forall X, Y \in E$.

f^* est dit adjoint de f.

Si $\{e_i\}$ est une base orthonormale et $A = M_{e_i}(f)$ (est la matrice de f dans la base $\{e_i\}$), alors $A^* \overset{\text{def}}{=} M_{e_i}(f^*)$ est la transposée de A :

$$A^* = {}^tA$$

Preuve : Soit $\{e_i\}$ base quelconque de E (non néc. orthonorm.)

notons : $A = M_{e_i}(f)$, $A^* = M_{e_i}(f^*)$, $X = M_{e_i}(x)$, $Y = M_{e_i}(y)$

$S = M(<\cdot,\cdot>)_{e_i}$. Alors : $f(x) = AX$ et

$<f(x), y> = <x, f^*(y)> \iff {}^t(AX)SY = {}^tXS(A^*Y)$ $\forall X, Y$

mais : ${}^t(AX)SY = {}^tX{}^tASY = {}^tXSA^*Y$

$\iff {}^tAS = SA^*$

S est inversible comme matrice d'un produit scalaire

$\Rightarrow A^* = S^{-1}\,{}^tAS$.

$\Rightarrow A^*$, et donc f^*, est unique et existe.

En particulier, si $\{e_i\}$ est orthonormée $\Rightarrow S = Id$

$\Rightarrow A^* = {}^tA$. ∎

Propriétés : $f : E \to E$ endomorphisme, $\lambda \in \mathbb{R}$ scalaire.

(a) $f^{**} = f$, $(id)^* = id$

(b) $(f+g)^* = f^* + g^*$, $(\lambda f)^* = \lambda f^*$

$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

(c) $rg(f^*) = rg(f)$ $(= \dim Im(f))$

$dét(f^*) = dét(f)$.

Preuve :

Soit $\{e_i\}$ une base orthonormale (existe toujours pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$).

$\Rightarrow A^* = {}^tA \Rightarrow$ on a (a), (b), (c).

${}^t({}^tA) = A$, ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$, $rg({}^tA) = rg(A)$, $dét({}^tA) = dét(A)$.

Déf : $f : E \to E$ est autoadjoint (ou symétrique) si $f^* = f$.

Cor : f est autoadjoint ssi dans une base orthonormale :

${}^tA = A$, i.e. A est symétrique.

Théorème :

Soit f un endomorphisme symétrique d'un esp. euclidien.

On a :

(a) les valeurs propres de f sont tout réelles

(b) f est diagonalisable

(c) les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux (on peut donc construire une base orthonormale de vecteurs propres en choisissant un base orthonormale dans chaque esp. propre)

Rmq : sous-espace d'une esp. euclidien est aussi euclidien.)

En termes de matrices :

Tout matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et les esp. propres sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$).

Rappel: Polynôme caractéristique de f

$$P_\lambda(f) = \det(f - \lambda\, id)$$

Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme caractéristique. [Vecteurs propres : $Av = \lambda v$].

Théorème (principal) $\mathbb{K}$ corps ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

E $\mathbb{K}$-esp. vectoriel. $f : E \to E$ endomorphisme.

f est diagonalisable (càd : $\exists P$ inversible t.q. $P^{-1}AP$ = diagon

si et seulement si :

1. $P_f(\lambda)$ a toutes les racines dans $\mathbb{K}$.
2. Pour chaque valeur propre λ_i de multiplicité α_i on a: $\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$

   où E_{λ_i} est l'esp. propre associé au valeur propre λ_i (en général, $\dim E_{\lambda_i} \leq \alpha_i$).

Rmq: Si on a seul 1. $\Rightarrow$ f est trigonalisable.

Preuve du théorème sur les matrices symétriques réelles :

(a) Soit A la matrice symétrique réelle qui represent f dans une base orthonormale et soit λ un valeur propre (peut-être complexe).

Montrons que $\lambda \in \mathbb{R}$:

$AX = \lambda X \Rightarrow \overline{AX} = \overline{\lambda X}$ c.à.d. $\bar{A}\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$

A réelle $\Rightarrow A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$.

Donc:

$$\underset{\substack{\| \\ {}^t(\lambda X)\bar{X}}}{{}^t(AX)\bar{X}} = \underset{\substack{\| \\ {}^tX\bar{\lambda}\bar{X}}}{{}^tX(A\bar{X})} \text{ car } A \text{ est symétrique}$$

$\Rightarrow \lambda\|X\|^2 = \bar{\lambda}\|X\|^2 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$ car $X \neq$

(b) Montrons, par récurrence sur la dimension n de E, qu'il existe une base de vecteurs propres.

Pour $n=1$, il y a rien à montrer $\Rightarrow$ ok.

Supposons qu'il soit vrai pour toutes les dimensions $\leq n-1$.

Soit λ un valeur propre, et soit x vecteur propre corresp. à λ.

Posons : $H \overset{def}{=} x^{\perp}$. On a $\dim H = n-1$

H est stable pour f, c. à. d $f(H) \subseteq H$

En effet, si $y \in H$ alors $y \perp x$ et on a:

$<f(y), x> = <y, f^{*}(x)> = <y, f(x)> = \lambda <y, x> = 0$

$\Rightarrow f(y) \in H$.

Alors : $\tilde{f} \overset{def}{=} f_{|_H}$ est un endomorphisme symétrique:

$<\tilde{f}(v), w>_H = <f(v), w>_E = <v, f(w)>_E = <v, \tilde{f}(w)>_H \quad \forall v, w \in H.$

$\Rightarrow$ par l'hypothèse de recurrence $\exists \{e_2, \dots, e_n\}$ base formée de vecteurs propres de $\tilde{f}$.

Alors $\{x, e_2, \dots, e_n\}$ est une base de E formée de vecteurs propres de f $\Rightarrow$ f est diagonale dans cette base.

c) Soient v_1, v_2 vecteurs propres correspondant aux valeurs propres λ_1, λ_2 avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Montrons que $v_1 \perp v_2$.

On a:

$<f(v_1), v_2> = \lambda_1 <v_1, v_2>$

f autoadjoint $\Rightarrow <f(v_1), v_2> = <v_1, f(v_2)> = \lambda_2 <v_1, v_2>$

$\Rightarrow \lambda_2 <v_1, v_2> = \lambda_1 <v_1, v_2>$ mais $\lambda_1 \neq \lambda_2$ implique donc $<v_1, v_2> = 0$.

$\boxed{ok}$

Rmq : Une matrice symétrique complexe n'est pas nécessairement diagonalisable (ni dans $\mathbb{R}$, ni dans $\mathbb{C}$).

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix} \qquad P_A(\lambda) = (\lambda - i)^2 \Rightarrow i \text{ est valeur propre double.}$$

$$E_i = \ker(A - i\,\mathrm{id}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = i x_1 \\ x_1 + 2i x_2 = i x_2 \end{cases} \Rightarrow E_i = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Alors $\dim(E_i) = 1 < \mathrm{mult}(i) = 2$ et A n'est pas diagonalisable (car il n'y a pas une base de vecteurs propres).

Par contre, si on considère :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad P_B(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1 = (\lambda - 1 - \sqrt{2})(\lambda - 1 + \sqrt{2})$$

on a : $\dim(E_{1\pm\sqrt{2}}) = 1 = \mathrm{mult}(1 \pm \sqrt{2})$, et B est diagonalisable.

B est symétrique réelle.

Groupe orthogonal.

On va etudier les endomorphismes $f: E \to E$, où E est un espace euclidien, qui conservent la norme des vecteurs.

Déf: E esp. euclidien, $f: E \to E$ endomorphisme.

On dit que f est orthogonal si

$$< f(x), f(y) > = < x, y > \quad \forall x, y \in E.$$

Proposition: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(a) f est orthogonal

(b) $\|f(x)\| = \|x\| \quad \forall x \in E$.

(c) Si $\{e_i\}$ est une base orthonormale et $A = M_{e_i}(f)$, on a: $\boxed{{}^tAA = Id}$.

En particulier, A est inversible et $\det A = \pm 1$.

Preuve:

(a) $\Rightarrow$ (b) evident.

(b) $\Rightarrow$ (a):

$$\begin{aligned} < f(x), f(y) > &= \frac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \\ &= < x, y >. \end{aligned}$$

cqfd

(a) $\Leftrightarrow$ (c): dans une base orthonormée:

$$\forall x, y \in E, < f(x), f(y) > = < x, y > \iff ({}^tAX) AY = {}^tX Y \quad \forall X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$$

$$\overset{\shortparallel}{{}^tX\,{}^tA}AY = {}^tXY$$

$$\iff {}^tAA = Id$$

Alors $\det({}^tAA) = 1$. Or $\det({}^tA) = \det(A) \Rightarrow (\det(A))^2 = 1$

$\Rightarrow \det(A) = \pm 1 \Rightarrow A$ est inversible. $({}^tAA) \cdot A^{-1} = Id \cdot A^{-1}$

Corollaire : Si f est un endomorphisme orthogonal, alors $\det(f) = \pm 1$, en particulier f est bijectif.

Prop : f orthogonal $\Leftrightarrow$ il transforme toute base orthonormée en une base orthonormée.

Preuve :

f orthogonal $\Rightarrow$ bijectif $\Rightarrow$ base $\mapsto$ base.

Soit $\{e_i\}$ base o.n. On a :

$<f(e_i), f(e_j)> = <e_i, e_j> = \delta_{i,j} \Rightarrow \{f(e_i)\}$ est base o.n.

Réciproquement, supposons qu'il existe une base o.n. $\{e_i\}$ t.q. $\{f(e_i)\}$ soit une base o.n., et soient :

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$

Puisque $\{e_i\}$ est o.n. $<x, y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} <f(x), f(y)> &= <\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j f(e_j)> \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j <f(e_i), f(e_j)> \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \delta_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = <x, y> \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ est orthogonal.

Déf : L'ensemble $O(n, \mathbb{R}) \overset{\text{déf}}{=} \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA A = I\}$
$= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A\,{}^tA = I\}$

a une structure de groupe :

(a) $A, B \in O(n, \mathbb{R}) \Rightarrow A \cdot B \in O(n, \mathbb{R})$

(b) $I \in O(n, \mathbb{R})$

(c) Si $A \in O(n, \mathbb{R})$, $\Rightarrow A^{-1} \in O(n, \mathbb{R})$.

associative. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

$O(n,\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL(n,\mathbb{R})$.
$O(n,\mathbb{R})$ est dit <u>groupe orthogonal</u>.
$SO(n,\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in O(n,\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$ est aussi un groupe, dit <u>groupe spécial orthogonal</u>.

<u>Preuve</u>. (a) ${}^t(AB)(AB) = {}^tB\,{}^tA\,A\,B = {}^tB\,Id\,B = Id$

(b) évident

(c) $A^{-1} = {}^tA$. $A \in O(n,\mathbb{R}) \Rightarrow {}^tA \in O(n,\mathbb{R})$

car ${}^t({}^tA)\,{}^tA = A\,{}^tA = A^{-1}A = Id$.

ok

Les matrices orthogonales représentent dans une base o.n. les transformations orthogonales d'un espace euclidien - Elles préservent la longueur et l'angle (claire dans $\mathbb{R}^2$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$).

<u>Prop</u>: La matrice de passage d'une base o.n. à une base o.n. est orthogonale.

<u>Preuve</u>: Soient $\{e_i\}$, $\{e'_i\}$ deux bases orthonormées et f l'endomorphisme définit par
$f(e_i) = e'_i$ $(i = 1,..,n)$. On a $M_{e_i}(f) = P_{e_i \to e'_i}$ par définition.
$\{e'_i\}$ base o.n. $\Rightarrow$ f est orthogonale $\Rightarrow$ $P_{e_i \to e'_i}$ est une matrice orthogonale.

$\boxed{ok}$

Etude de $O(2,\mathbb{R})$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, matrice 2×2 réelle.

On a $A \in O(2,\mathbb{R})$ ssi ${}^tAA = I$ c.à.d. :

${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$$

Donc ${}^tAA = I \iff \begin{cases} a^2+c^2 = 1 \\ b^2+c^2 = 1 \\ ab+cd = 0 \end{cases}$

$\iff$ le systéme des vecteurs colonnes est orthonormé.

Donc $\exists\, \theta, \varphi \in \mathbb{R}$ t.q. $a = \cos\theta \quad b = \cos\varphi$

$c = \sin\theta \quad d = \sin\varphi$

et en plus, la condition $ab + cd = 0$ est equivalent à

$\underbrace{\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi}_{\cos(\theta - \varphi)} = 0$

et $\cos(\theta - \varphi) = 0 \iff \varphi - \theta = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Donc :

$b = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^{k+1}\sin\theta$

$d = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^{k}\cos\theta$

et on a trouvé que :

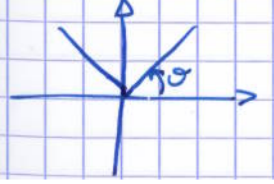
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & (-1)^{k+1}\sin\theta \\ \sin\theta & (-1)^k\cos\theta \end{pmatrix}$$

En autre, on a $\det(A) = (-1)^k\cos^2\theta + (-1)^k\sin^2\theta$

$= (-1)^k$

alors, $A \in SO(2,\mathbb{R})$ ssi k est paire, c.à.d. : $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

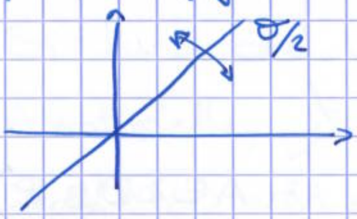
$\Rightarrow$ A est une <u>rotation d'angle θ et centre O</u>.



En pensant $x+iy = z$, on a $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{i\theta} z$
rotation

Donc $SO(2,\mathbb{R}) \cong S^1 = \mathcal{U}(1)$

De l'autre côté, $A \in O(2,\mathbb{R}) \setminus SO(2,\mathbb{R}) \iff k$ est impaire,
$\iff A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, donc A est symétrique et alors elle est diagonalisable. Ses valeurs propres sont 1 et -1 et elle répresente la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle $\frac{\theta}{2}$ passant pour O.



$\boxed{\text{réflexion}}$

Etude de $O(3,\mathbb{R})$:

Proposition : Soit $A \in O(3,\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ t.q. $A = M_{e_i}(f)$, $\{e_i\}$ étant la base canonique (o.n.). Il existe alors une base $\{e'_1, e'_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, orthonormée, t.q.

$$A' = M_{e'_i}(f) = \left(\begin{array}{cc|c} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & \varepsilon \end{array}\right)$$

où : $\varepsilon = 1$ si $\det(A) = 1$, c'est à dire si $A \in SO(3,\mathbb{R})$

$\varepsilon = -1$ si $\det(A) = -1$, c'est à dire si $A \notin SO(3,\mathbb{R})$.

Preuve :

Si $A = \pm Id \Rightarrow$ vrai pour $\{e'_i\} = \{e_i\}$.

On prends $\theta = 0$ si $A = I$, $\theta = \pi$ si $A = -I$.

On peut donc supposer $A \neq \pm Id$.

Lemme 1.

Si λ est une valeur propre réelle de A, alors $\lambda = \pm 1$.

Preuve :

En effet, soit v vecteur propre correspondant à λ.

On a $\|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$ $\quad (v \neq 0)$

Mais f est orthogonal $\Rightarrow \|f(v)\| = \|v\| \Rightarrow |\lambda| = 1$

$\square$

Lemme 2 : • Si $\det(A) = 1$, alors $\lambda = 1$ est valeur propre d'ordre 1 ou 3.

• Si $\det(A) = -1$, alors $\lambda = -1$ est valeur propre d'ordre 1 ou 3.

Preuve :

Supposons $\text{dét}(A) = 1$ ($\text{dét}(A) = -1$ se traite d'une manière analogue).

Si les trois valeurs propres sont réelles, alors

$\text{dét}(A) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ ou $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2\lambda_3$

Si l'une des valeurs propres, μ, est complexe, alors, puisqu

A est réelle, $\bar{\mu}$ est valeur propre aussi, et donc :

$\text{dét}(A) = \lambda \mu \bar{\mu} \Rightarrow \lambda$ réelle, $\text{dét} A = 1 \Rightarrow \lambda > 0 \Rightarrow \lambda = 1$

Ok

Lemme 3 :

Si $\text{dét}(A) = 1 \Rightarrow \dim E_1 = 1$

Si $\text{dét}(A) = -1 \Rightarrow \dim E_{-1} = 1$.

Preuve :

On regarde le cas $\text{dét}(A) = 1$ ($\text{dét}(A) = -1$ analogue).

Si $\dim(E_1) = 3 \Rightarrow A = Id$ ce qui est exclus.

Supposons, que $\dim(E_1) = 2$ et donc $\lambda = 1$ est valeur propre triple. Soit $\{v_1, v_2\}$ base de E_1 et $w \neq 0$ t.q $w \in \text{Vect}\{v_1, v_2\}^{\perp}$. On a :

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } f(v_i) = v_i}}{<f(w), v_i> =} <f(w), f(v_i)> \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ orthogonal}}}{=} <w, v_i> = 0 \quad i = 1, 2$$

$\Rightarrow f(w) \in \text{Vect}\{v_1, v_2\}^{\perp} \Rightarrow f(w) \in \text{Vect}\{w\}$

$\Rightarrow \exists\, \lambda_0 \in \mathbb{R}^*$ t.q $f(w) = \lambda_0 w \Rightarrow \lambda_0 = \lambda = 1$ car $\lambda = 1$ est valeur propre triple $\Rightarrow f(w) = w \Rightarrow w \in E_1$ qui nous donne une contradiction, car $w \in E_1^{\perp}$. Alors $\dim(E_1) = 1$.

$\square$

Lemme 4:

Si $\det(A) = 1$ (résp. $\det(A) = -1$), alors le plan $\Pi = E_1^{\perp}$ (résp. $\Pi = E_{-1}^{\perp}$) est invariant par f et la restriction de f à Π est une rotation.

Preuve:

Soit $x \in \Pi$, c.à.d. $\langle x, w \rangle = 0$ où $E_{\pm 1} = \mathrm{Vect}\{w\}$.

$\langle f(x), f(w) \rangle = \langle x, w \rangle = 0$. Or $f(w) = \pm w$ donc,

$\langle f(x), w \rangle = 0 \Rightarrow f(x) \in \Pi$.

Ainsi Π est f-invariant.

Soit $\tilde{f} = f_{|\Pi}$. $\forall x, y \in \Pi$, on a

$\langle \tilde{f}(x), \tilde{f}(y) \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, donc $\tilde{f}$ est orthogonale

Montrons que $\det(\tilde{f}) = 1$.

Si $\{v_1, v_2\}$ est une base de Π, on a:

$M_{v_1,v_2,w}(f) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = M_{v_1,v_2}(\tilde{f})$ et

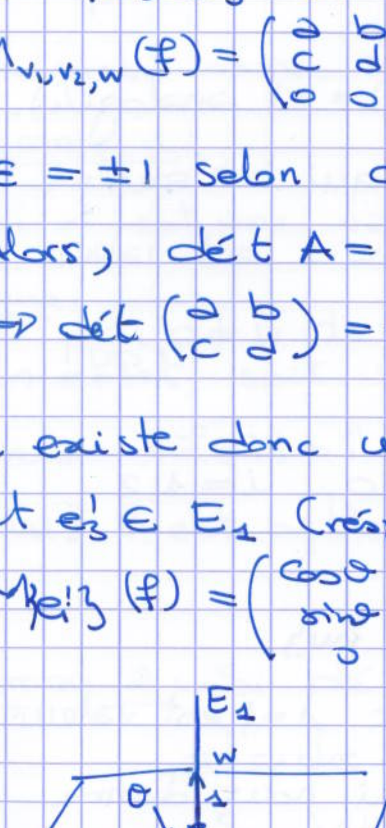
$\varepsilon = \pm 1$ selon $\det A = \pm 1$ (depuis Lemme 3 on a $\det A = \varepsilon$).

Alors, $\det A = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \varepsilon = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \det(A)$

$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$ et $\tilde{f}$ est une rotation.

Il existe donc une b.o.n. $\{e_1', e_2', e_3'\}$ avec $e_1', e_2' \in \Pi$ et $e_3' \in E_1$ (résp E_{-1}) t.q.

$M_{\{e_i'\}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon = \det(A)$.



si $\varepsilon = 1$

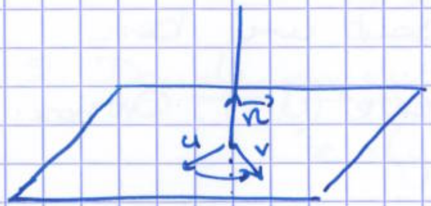
Si $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ même plus une reflection en $E_{-1}^{\perp}$

$\mathrm{tr}(A) = \varepsilon + 2\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(A) - \det(A))$.

Angles en dimension 3.

Soit Π un plan vectoriel dans un espace euclidien <u>orienté</u> de dimension 3, E_3.

On suppose Π muni du produit scalaire induit et de l'orientation définie par le choix d'un vecteur normal $\vec{n}$, que l'on supposera unitaire.



On peut définir l'angle orienté $\theta = (u\ v)$ entre deux vecteurs $u, v \in \Pi \setminus \{0\}$.

Si $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base directe de Π (càd. $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vec{n})$ est base directe de E_3) on a:

$$\sin\theta = \frac{\text{dét}\,\| u, v, \vec{n} \|_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vec{n})}}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

En effet, si $U = \frac{u}{\|u\|}$ et $V = \frac{v}{\|v\|}$, on a:

$$\frac{\text{dét}\,\| u, v, \vec{n} \|_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vec{n})}}{\|u\| \cdot \|v\|} = \text{dét}\,\| U, V, \vec{n} \|_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \vec{n})} = \text{dét}\begin{pmatrix} U_1 & V_1 & 0 \\ U_2 & V_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{dét}\,\| U, V \|_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} = \sin\theta.$$

<u>Prop</u>: Pour toute b.o.n. directe $\mathcal{B}$, on a:

$$\sin\theta = \frac{\text{dét}\,\| u, v, \vec{n} \|_{\mathcal{B}}}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Produit Vectoriel

Soit E_3 espace vectoriel euclidien de dim. 3, orienté.

Déf : Soient $u, v \in E_3$.

- Si u, v sont liés, on pose : $u \wedge v = 0$
- Si u et v sont libres, on oriente le plan Vect (u, v) par le choix de la base $\{u, v\}$ et on choisit la normale unitaire $\vec{n}$ de manière que $(u, v, \vec{n})$ soit une base directe de E_3. Soit θ l'angle orienté $(u\, v)$. On pose :

$$u \wedge v = (\|u\| \cdot \|v\| \cdot \sin\theta) \cdot \vec{n}$$

$u \wedge v$ est dit produit vectoriel de u et v.

Propriétés :

1. u et v sont liés ssi $u \wedge v = 0$
2. $u \wedge v = - v \wedge u$
3. $\| u \wedge v \| =$ Aire (P), où P est le parallélogramme défini par les vecteurs u et v.
4. Soit $\{e_i\}$ b.o.n. directe, u, v deux vecteurs indépendants de E_3 et $\vec{n}$ le vecteur unitaire t.q $(u, v, \vec{n})$ soit une base directe. On a alors :

$$u \wedge v = \det \| u, v, \vec{n} \|_{\{e_i\}} \cdot \vec{n}.$$

Corollaire. L'application $E \times E \to E$ définie par $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est bilinéaire et alternée.

Expression du produit vectoriel en fonction des coordonnées des vecteurs.

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ b.o.n. directe. On a comme conséquence de la déf. :

$$e_1 \wedge e_2 = e_3 \quad , \quad e_2 \wedge e_3 = e_1 \quad , \quad e_3 \wedge e_1 = e_2 \quad (*)$$

On déduit donc du corollaire, que si $\{e_1, e_2, e_3\}$ est b.o.n. directe et $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$:

$$\boxed{x \wedge y = (x_2 y_3 - x_3 y_2) e_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3}$$

Propriétés :

1. Identité de Lagrange :

$$\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2$$

2. Double produit vectoriel :

$$x \wedge (y \wedge z) = \langle x, z\rangle y - \langle x, y\rangle z$$

3. Identité de Jacobi :

$$x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) = 0.$$

Prop : Soient $x, y \in E_3$. Alors $x \wedge y$ est le seul vecteur de E_3 t.q

$$\langle x \wedge y, z\rangle = \det \|x, y, z\|_{e_i} \quad \forall z \in E_3$$

$\{e_i\}$ étant une b.o.n. directe.

Symétries, réflexions, retournements.

Définition : Une symétrie est un endomorphisme s d'un esp. vectoriel E t.q. $s^2 = id$ (et $s \neq id$). Si E est euclidien, la symétrie est dite orthogonale si elle est une transformation orthogonale.

(Puisque $X^2 - 1$ est annulateur de s) s est diagonalisable et $E = E_1 \oplus E_{-1}$. On dit que s est une symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_{-1}.

Si s est orthogonale, alors elle est autoadjointe, c.à.d. $s^* = s$.

Définition : On appelle réflexion une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace de dimension $= \dim(E) - 1$.

On appelle retournement une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace de dimension $= \dim(E) - 2$.

Donc en $\mathbb{R}^3$ on a : id, $-id$, réflexions, retournements, comme symétries orthogonales.

Réflexions en $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ dét $= -1$

Retournements en $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ dét $= 1$.

Théorème : (Décomposition des transformations orthogonales en produits de réflexions)

Soit f une transformation orthogonale d'un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Alors f peut s'écrire sous la forme :

$$f = s_1 \circ \cdots \circ s_r, \quad r \leq n$$

où les s_i sont des réflexions. (La décomposition n'est pas unique).

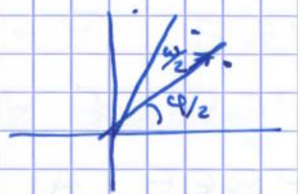
Dém. élémentaire en $\mathbb{R}^2$:

On a une rotation de centre O et angle θ, c'est-à-d[ire] de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

et nous voulons l'écrire comme produit de deux réflexions, c'est-à-dire :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}}_{\text{réflexion en } \frac{\varphi}{2}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ \sin\omega & -\cos\omega \end{pmatrix}}_{\text{réflexion en } \frac{\omega}{2}} = (*)$$



On a :

$$(*) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\omega + \sin\varphi\sin\omega & \cos\varphi\sin\omega - \cos\omega\sin\varphi \\ \sin\varphi\cos\omega - \cos\varphi\sin\omega & \sin\varphi\sin\omega + \cos\varphi\cos\omega \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \cos\varphi\cos\omega + \sin\varphi\sin\omega = \cos\theta \\ \sin\varphi\cos\omega - \cos\varphi\sin\omega = \sin\theta \end{cases}$$

mais : $\begin{cases} \cos\varphi\cos\omega + \sin\varphi\sin\omega = \cos(\varphi-\omega) \\ \sin\varphi\cos\omega - \cos\varphi\sin\omega = \sin(\varphi-\omega) \end{cases}$

Donc : $\varphi - \omega = \theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{ok}}$

Espaces Affines

<u>Définition</u> : Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel et soit E un ensemble. On dit que E est muni d'une <u>structure d'espace affine de direction $\vec{E}$</u> si l'on se donne une application :

$$T : \vec{E} \times E \longrightarrow E$$
$$(\vec{v}, P) \longmapsto T_{\vec{v}}(P) \overset{\text{notation}}{=} P + \vec{v}$$

t.q :

1. $\forall P \in E : P + \vec{0} = P$
2. $\forall P \in E$ et $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \vec{E}$ on a : $(P+\vec{v})+\vec{w} = P + (\vec{v}+\vec{w})$
3. $\forall P, Q \in E, \exists! \ \vec{v} \in \vec{E}$ t.q. $Q = P + \vec{v}$.

L'application $T_{\vec{v}} : E \to E$ déf par $T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}$ est dite <u>translation associée à $\vec{v}$</u>.

[en autres termes, $(\vec{E}, +)$ agit transitivement et librement sur E.]

Si $\vec{E}$ a dimension n on dit que E est de dimension n.

Si $P, Q \in E$, l'unique vecteur $\vec{v}$ t.q. $Q = P + \vec{v}$ sera noté $\overrightarrow{PQ}$ et on aura donc : $Q = P + \overrightarrow{PQ}$.

L'axiome 2 équivaut à la :

<u>Relation de Chasles</u> :

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} \quad \text{dans } \vec{E}.$$

<u>En effet</u>, avec la notation $Q = P + \overrightarrow{PQ}$, l'axiome 2 peut s'exprimer comme :

$$(P+\vec{v})+\vec{w} = (P + \overrightarrow{PQ}) + \vec{w} = Q + \vec{w}$$

où on a posé $Q = P + \vec{v} = P + \overrightarrow{PQ}$, et si on pose $R = Q + \vec{w} = Q + \overrightarrow{QR}$ on a que le premier membre s'écrit comme :

$$(P+\vec{v})+\vec{w} = Q + \overrightarrow{QR} = R.$$

D'autre part,

$P+(\vec{v}+\vec{w}) = P+(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR})$.

Donc l'axiome 2 est satisfait ssi $R = P+(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR})$ mais d'après l'axiome 3 on a $R = P+\overrightarrow{PR}$ donc par unicité on trouve $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

ok

L'axiome 3 peut aussi s'exprimer de la manière suivante:

Soit $P \in E$ et
$$\theta_P : E \longrightarrow \vec{E}$$
$$Q \longmapsto \overrightarrow{PQ}$$

Alors θ_P est <u>bijective</u>.

On peut donc définir la notion abstraite d'espace affine comme:

<u>Déf.</u> Soit E un ensemble et soit $\vec{E}$ un esp. vectoriel. On dit que E est un <u>esp. affine de direction $\vec{E}$</u> si on a une application:

$$\theta : E \times E \longrightarrow \vec{E}$$
$$(P, Q) \longmapsto \overrightarrow{PQ}$$

telle que:

1. $\forall P \in E$, l'application $\theta_P : E \to \vec{E}$ déf. par $\theta_P(Q) = \overrightarrow{PQ}$ est bijective [$\rightsquigarrow$ c'est l'axiome 3 de la prémière déf. qu'on a vu]
2. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}$ [$\rightsquigarrow$ on a montré qu'il s'agit de l'axiome 2]

<u>Remarque</u>: puisque $Q = \theta_P^{-1}(\overrightarrow{PQ})$ et $Q = P+\overrightarrow{PQ}$ on a:
$$\theta_P^{-1}(\overrightarrow{PQ}) = P+\overrightarrow{PQ}.$$

Les propriétés suivantes sont conséquence immédiate de la relation de Chasles.

(i) $\overrightarrow{PP} = 0$ (s'obtient en faisant $P=Q=R$). Cela signifie : P=P

(ii) $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ (s'obtient en prenant $P=Q$ et en tenant compte de (i)).

Exemples :

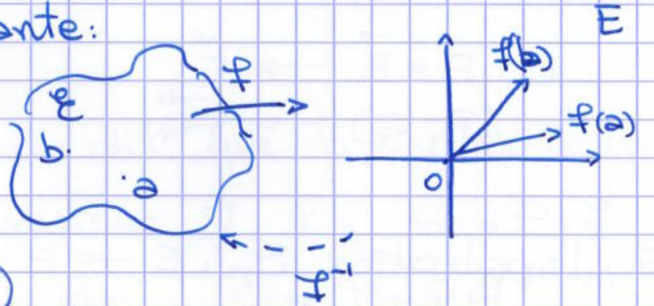
1. On définit une structure d'espace affine sur un espace vectoriel E en posant $\overrightarrow{ab} = b - a$.
Cette structure est dite standard (ou canonique).

2. Plus généralement, soit A un ensemble et $f : A \to E$ une bijection sur un espace vectoriel E.
On définit donc une structure d'espace affine sur A en posant $\overrightarrow{ab} = f(b) - f(a)$.

Vectorialisé :

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble et $\vec{E}$ un espace vectoriel. On suppose qu'il existe une bijection $f : \mathcal{E} \to \vec{E}$. Alors on peut toujours "transporter" la structure d'esp. vect. de $\vec{E}$ sur $\mathcal{E}$ de la manière suivante :

On pose, pour $a, b \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)



$$a + b = f^{-1}(f(a) + f(b))$$
$$\lambda \cdot a = f^{-1}(\lambda f(a))$$

On vérifie alors facilement les axiomes de la structure d'esp. vectoriel. [exo].

De plus, on a :
$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$
$$f(\lambda \cdot a) = \lambda f(a)$$
c'est-à-dire : f est un isomorphisme.

Or, soit E un espace affine de direction $\vec{E}$ et fixons un point $O \in E$. Alors, l'application
$\vartheta_O : E \to \vec{E}$ définie par $\vartheta_O(P) = \overrightarrow{OP}$
est une bijection, et on peut donc transporter la structure

$$P+Q = \vartheta_O^{-1}(\vartheta_O(P)+\vartheta_O(Q)) = \vartheta_O^{-1}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}) = O+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$$

$$\lambda\cdot P = \vartheta_O^{-1}(\lambda\cdot\vartheta_O(P)) = \vartheta_O^{-1}(\lambda\overrightarrow{OP}) = O+\lambda\overrightarrow{OP}$$

c'est-à-dire, pour $P = O+\overrightarrow{OP}$ et $Q = O+\overrightarrow{OQ}$:

$$P+Q = O+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$$

$$\lambda\cdot P = O+\lambda\cdot\overrightarrow{OP}$$

E muni de ces lois est un esp. vectoriel qui est dit vectorialisé en O et est noté E_O.

Rmq: Notons que $P+O = O+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OO} = O+\overrightarrow{OP} = P$, donc O est l'élement neutre.

Comme ϑ_O est un isomorphisme, on a

$$\begin{aligned}\vartheta_O(Q-P) &= \vartheta_O(Q+(-1)\cdot P) = \vartheta_O(Q)+\vartheta_O(-P)\\ &= \vartheta_O(Q)-\vartheta_O(P)\\ &= \overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP} \qquad [\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ} \text{ par Chasles}].\\ &= \overrightarrow{PQ}\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\quad \overrightarrow{PQ} = \vartheta_O(Q-P)$. $(*)$

Par ailleurs, puisque ϑ_O est un isomorphisme, on identifie $\vartheta_O(P-Q)$ avec $P-Q$ donc on peut écrire $(*)$ comme:

$$\overrightarrow{PQ} = Q-P$$

Ceci veut dire que modulo le choix d'un point on peut identifier l'esp. affine E avec l'esp. vectoriel $\vec{E}$ muni de la structure affine standard. Donc: l'exemple standard est le seul exemple d'esp. affine (à isomorphisme près)

En particulier, les propriétés d'un esp. affine peuvent être démontrées dans le cas standard, sans perte de généralité.

Barycentre

Déf. Soit E un esp. affine, $P_1, \dots, P_k \in E$ et $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{K}$ (corps, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) t.q. $t = t_1 + \dots + t_k \neq 0$.

Si O est un point quelconque de E, alors le point

$$G = O + \frac{1}{t}\left(t_1 \overrightarrow{OP_1} + \dots + t_k \overrightarrow{OP_k}\right)$$

ne dépend pas du choix de O et il est dit <u>barycentre des points $P_1, \dots, P_k$ affectés des coefficients $t_1, \dots, t_k$</u>.

En effet, si O' est un autre point de E, on a:

$$\begin{aligned} O + \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{OP_i} &= O + \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k}\left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P_i}\right)\cdot t_i \\ &= O + \frac{1}{t}\left(\sum_{i=1}^{k} t_i\right)\overrightarrow{OO'} + \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{O'P_i} \\ &= O + \overrightarrow{OO'} + \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{O'P_i} \\ &= O' + \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{O'P_i}. \end{aligned}$$

Puisque l'expression de G ne dépend pas du choix de O, on peut écrire :

$$\boxed{G = \frac{1}{t}\left(t_1 P_1 + \dots + t_k P_k\right)}$$

Rmq: il n'a pas de sens de faire la "somme" de points de E, sinon avec les abus de notations signalés et en vectorialisant en un point (mais alors la somme dépendra du point choisi). En revanche, la "somme barycentrique" a un sens précis, car elle ne dépend pas du choix du point.

Sous-espaces affines.

<u>Déf.</u> Soit E un esp. affine de direction $\vec{E}$ et $F \subset E$ un sous-ensemble non vide de E. F est un <u>sous-espace affine de E</u> s'il existe un sous-espace vectoriel $\vec{F}$ de $\vec{E}$ tel que F soit un espace affine de direction $\vec{F}$.

Cela veut dire que si P_0 est un point de F, alors:

$$F = \{P \in E \mid P = P_0 + \overrightarrow{P_0P}, \text{ avec } \overrightarrow{P_0P} \in \vec{F}\}$$

On notera aussi $F = P_0 + \vec{F}$ avec $P_0 \in F$

<u>Exemples:</u>

1. Soient $P, Q \in E$, $P \neq Q$ et

$$D = \{M \in E \mid M = P + t\overrightarrow{PQ}, t \in \mathbb{K}\}$$

D est un sous-espace affine de direction $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{PQ})$, qui est dit <u>droite affine passant par P et Q</u>.

Par exemple, si $E = \mathbb{R}^3$ avec la structure standard et $P = (2,3,-1)$, $Q = (7,0,2)$, la droite passant par P et Q est l'ensemble des points $M = (x,y,z)$ t.q.

$$\begin{cases} x = 2 + (7-2)t = 2 + 5t \\ y = 3 + (0-3)t = 3 - 3t \\ z = -1 + (2-(-1))t = -1 + 3t \end{cases}$$

cette expression est dite <u>équation paramétrique de la droite</u>.

2. Soient P, Q, R trois points de E non contenu dans une droite affine cela veut dire que $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont indépendants) et

$$\mathcal{P} = \{M \in E \mid M = P + s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR}, s,t \in \mathbb{K}\}.$$

est un sous-espace affine de E de direction $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\}$ dit <u>plan passant par P, Q, R</u>.

Par exemple, soient $P=(1,1,1)$, $Q=(2,-3,0)$, $R=(5,0,-1)\in\mathbb{R}^3$, on a:

$\overrightarrow{PQ}=(1,-4,-1)$, $\overrightarrow{PR}=(4,-1,-2)$ donc ils sont independent et par conséquent P, Q, R n'appartiennent pas à la même droite affine. L'équation paramétrique du plan par P, Q, R est

$$\begin{cases} x = 1+s+4t \\ y = 1-4s-t \\ z = 1-s-2t \end{cases}$$

3. Plus généralement, étant donnés k points $P_1,\dots,P_k\in E$, l'ensemble

$$\mathrm{Aff}(P_1,\dots,P_k)=\{P\in E \mid P=P_1+t_2\overrightarrow{P_1P_2}+\dots+t_k\overrightarrow{P_1P_k}\}$$

est un sous-espace affine de E dit <u>sous-espace engendré</u> par les points $P_1,\dots,P_k$. Sa direction est évidemment $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{P_1P_2},\dots,\overrightarrow{P_1P_k}\} \Rightarrow \dim = k-1$

<u>Rmq</u>: Le rôle de P_1 peut être joué par n'importe quel autre point. En effet (par exemple pour 3 points):

$$P=P_1+t_2\overrightarrow{P_1P_2}+t_3\overrightarrow{P_1P_3}=P_1-t_2\overrightarrow{P_2P_1}+t_3(\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2P_3})$$
$$=P_2+(1-t_2-t_3)\overrightarrow{P_2P_1}+t_3\overrightarrow{P_2P_3} \quad \text{car } P_1=P_2+\overrightarrow{P_2P_1}.$$

Cette expression peut s'écrire aussi comme:

$$P=P_2+(1-t_2-t_3)\overrightarrow{P_2P_1}+t_2\overrightarrow{P_2P_2}+t_3\overrightarrow{P_2P_3}$$

P est donc <u>le barycentre des points</u> P_1, P_2 et P_3 affectés des coefficients $1-t_2-t_3, t_2, t_3$.

Nous verrons que cela reflète une situation générale.

Repères affines.

Déf. Soit E un esp. affine de dimension n. On appelle repère affine la donnée de $n+1$ points $P_0, P_1, \dots, P_n$ de E qui ne sont pas contenus dans un sous-espace affine de dimension $n-1$.

On voit immédiatement que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est un repère affine ssi $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\} = n$.

Aussi, la donnée d'un repère affine est équivalent à la donnée de $(P_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ où $P_0 \in E$ et $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est une base de $\vec{E}$.

Prop: Soit $(P_0, \dots, P_n)$ un repère affine. Alors tout $P \in E$ s'écrit d'une manière unique comme:

$$\boxed{P = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i} \quad \text{avec : } \alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1.$$

Les α_i sont dites coordonnées barycentriques de P.

Preuve:

Soit $(P_0, \dots, P_n)$ un repère affine. Donc $(\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n})$ est une base de $\vec{E}$ et le vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ se décompose d'une manière unique sur cette base, c.à.d. $\exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ t.q.

$$P = P_0 + \overrightarrow{P_0P} = P_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{P_0P_i} = O + \overrightarrow{OP_0} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{P_0O} + \overrightarrow{OP_i})$$

$$= O + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{OP_0} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OP_i}$$

$=$ Barycentre de $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de coefficients :

$$1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \alpha_1, \dots, \alpha_n.$$

Unicité : exo.

Corollaire: E est stable par combinaisons barycentriques, c.à.d., on oublie l'origine.

Exemple :

Soit $E=\mathbb{R}^3$ muni de la structure standard et

$P_0=(1,1,-1)$, $P_1=(2,1,0)$, $P_2=(0,1,-1)$, $P_3=(1,0,1)$.

Montrer que (P_0,P_1,P_2,P_3) est un repère affine et déterminer les composantes barycentriques du point $P=(1,1,0)$.

On a : $\overrightarrow{P_0P_1}=(1,0,1)$

$\overrightarrow{P_0P_2}=(-1,0\ 0)$

$\overrightarrow{P_0P_3}=(0,-1,2)$

et il est immediat de vérifier que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$ et par conséquence $(P_0,..,P_3)$ est un repère affine de $\mathbb{R}^3$.

Pour trouver des α_i telles que $(1,1,0)=\sum_{i=0}^{3}\alpha_i P_i$ avec $\alpha_0+..+\alpha_3=1$, il nous faut résoudre le systeme:

$$\begin{cases}\alpha_0+2\alpha_1+\alpha_3=1\\ \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=1\\ -\alpha_0-\alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1\end{cases}$$

qui a solution: $\alpha_0=-1$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=1$ et $\alpha_3=0$.

Sous-espace engendré :

Rappel : Soit $\vec{E}$ un esp. vectoriel et $A \subset \vec{E}$, $A \neq \emptyset$. On appelle sous-esp. engendré par A l'ensemble

$$\mathrm{Vect}(A) = \{ \text{Combinaisons linéaires finies des éléments de } A \}$$
$$= \{ x \in \vec{E} \mid x = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i,\ a_i \in A,\ I \text{ famille finie} \}$$

Cor. : Vect(A) est le plus petit sous-esp. vectoriel de $\vec{E}$ contenant A.

En effet, si $a \in A$ alors $a \cdot 1 = a$, donc $A \subset \mathrm{Vect}(A)$;
si $\vec{F}$ est un sous-esp. vectoriel de $\vec{E}$ contenant A, alors il est stable par combinaisons linéaires, donc $\mathrm{Vect}(A) \subset \vec{F}$.

Déf. : Soit E un esp. affine et $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. On pose :

$$\mathrm{Aff}(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Combinaisons linéaires barycentriques finies} \\ \text{des éléments de } A. \end{array} \right\}$$

De la même manière que pour les sous-esp. vectoriels engendrés on voit que Aff(A) est le plus petit sous-esp. affine de E contenant A.

Parallélisme.

Déf. : Soit E un esp. affine et F, G deux sous-espaces affines de E. On dit que F est parallèle à G, $F \parallel G$ si $\vec{F} \subset \vec{G}$.

Rmq : Si $F \parallel G \Rightarrow \dim F \leq \dim G$. Donc une droite peut être parallèle à un plan, mais pas la réciproque (pas de symétricité dans la déf.).

Prop : Si $F \parallel G$ e $F \cap G \neq \emptyset \Rightarrow F \subset G$.

Preuve. Soit $A \in F \cap G$, on a $F = A + \vec{F}$ et $G = A + \vec{G}$.
Par hypothèse $\vec{F} \subset \vec{G} \Rightarrow A + \vec{F} \subset A + \vec{G}$.

Intersection :

Rappel : deux sous-esp. vectoriels d'un esp. vectoriel contiennent toujours le vecteur nul $\vec{0}$, donc leur intersection n'est jamais vide. Nous allons voir que cela n'est pas toujours le cas pour les sous-espaces affines.

Proposition :

Soient F et G deux sous-espaces affines de E esp. affine.

Alors :

$$F \cap G \neq \emptyset \iff \forall P, Q \in F \times G \quad \overrightarrow{PQ} \in \vec{F} + \vec{G}.$$

Preuve :

En effet, si $F \cap G \neq \emptyset \Rightarrow \exists R \in F \cap G$ et :

$\forall P \in \vec{F}$ et $\forall Q \in G$ on a :

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} \in \vec{F} + \vec{G}.$$

Réciproquement, si $\forall P \in F$ et $\forall Q \in G$ on a

$\overrightarrow{PQ} \in \vec{F} + \vec{G}$, on pourra écrire :

$\overrightarrow{PQ} = \vec{v} - \vec{w}$ avec $\vec{v} \in \vec{F}$ et $\vec{w} \in \vec{G}$

$\Rightarrow Q = P + \vec{v} - \vec{w}$ et donc :

$$\underbrace{Q + \vec{w}}_{\in G} = P + \vec{v} - \vec{w} + \vec{w} = \underbrace{P + \vec{v}}_{\in F} \overset{\text{notation}}{=} A$$

$\Rightarrow A \in F \cap G.$ ∎

Proposition : Si $F \cap G \neq \emptyset \Rightarrow \overrightarrow{F \cap G} = \vec{F} \cap \vec{G}.$

Preuve : en effet, soit $M_0 \in F \cap G$. Alors, on a :

$F = M_0 + \vec{F}$ et $G = M_0 + \vec{G}$. Comme $M_0 \in F \cap G$, alors

$$\vec{v} \in \vec{F} \cap \vec{G} \iff \begin{cases} M_0 + \vec{v} \in F \\ M_0 + \vec{v} \in G \end{cases} \iff M_0 + \vec{v} \in F \cap G \iff \vec{v} \in \overrightarrow{F \cap G}$$

∎

Incidence :

Rappel : Soient $\vec{F}, \vec{G}$ deux sous-esp. vectoriels d'un esp. vectoriel $\vec{E}$. Alors $\vec{F} \cup \vec{G}$ n'est pas un sous esp. vectoriel de $\vec{E}$ en général, mais l'esp. vect. qu'il engendre est :

$$\text{Vect}(\vec{F} \cup \vec{G}) = \{ x \in \vec{E} \mid x = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p}_{\in \vec{F}} + \underbrace{\beta_1 w_1 + \dots + \beta_q w_q}_{\in \vec{G}} \}$$

$$= \vec{F} + \vec{G}.$$

De plus, on a :

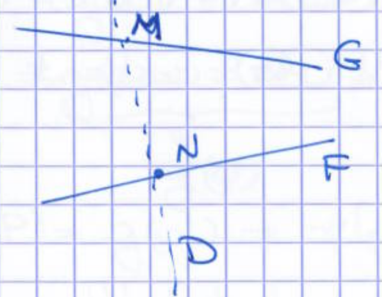
$$\dim(\vec{F} + \vec{G}) = \dim(\vec{F}) + \dim(\vec{G}) - \dim(\vec{F} \cap \vec{G}).$$

On a un analogue de cela pour les esp. affines :

Théorème d'incidence :

Soient F et G sous-esp. affines de E esp. affine. On a :

1. Si $F \cap G \neq \emptyset$ et $M_0 \in F \cap G$, alors :
$$\text{Aff}(F \cup G) = M_0 + (\vec{F} + \vec{G}).$$
2. Si $F \cap G = \emptyset$, alors en prenant $N \in F$ et $M \in G$ quelconques, on a :
$$\text{Aff}(F \cup G) = N + (\vec{F} + \vec{G} + \vec{D})$$
où $\vec{D}$ est la droite affine passant par M et N :
$D = N + t\overrightarrow{MN}$ $(t \in \mathbb{K})$.



$F \cap G = \emptyset$

Preuve :

1. Soit $W = M_0 + \vec{F} + \vec{G}$. W est sous-esp. affine de E.

Comme $M_0 + \vec{F} = F$ et $M_0 + \vec{G} = G$ on a $F \subset W$ et $G \subset W$. Donc $F \cup G \subset W$. Ainsi $W \supset Aff(F \cup G)$ car $Aff(F \cup G)$ est le plus petit sous-esp. affine contenant $F \cup G$.

D'autre part :

$$F \subset Aff(F \cup G) \Rightarrow \vec{F} \subset \overrightarrow{Aff(F \cup G)}$$

$$G \subset Aff(F \cup G) \Rightarrow \vec{G} \subset \overrightarrow{Aff(F \cup G)}$$

Ceci veut dire que $\vec{W} \subset \overrightarrow{Aff(F \cup G)}$

et donc $W \parallel Aff(F \cup G)$. Mais, comme $W \cap Aff(F \cup G) \supset F, G$ on a $W \subset Aff(F \cup G) \Rightarrow W = Aff(F \cup G)$. $\boxed{\text{cqfd}}$

2. Remarque :

Si $P, Q \in E \Rightarrow E$ contient toute la droite affine D passant par P et Q.

En effet $D = \{M = tP + (1-t)Q\}$ combinaison barycentrique et E est stable par combinaisons baricentriques.

Soient donc $N \in F$, $M \in G$ et D la droite par N et M.

$N \in F \Rightarrow N \in Aff(F \cup G)$; de même $M \in Aff(F \cup G)$

$\Rightarrow D \subset Aff(F \cup G)$. Aussi, comme $Aff(F \cup G)$ contient F, G et D, on aura

$$Aff(F \cup G) \supset Aff(F \cup G \cup D).$$

L'inclusion contraire est évidente,

donc $$Aff(F \cup G) = Aff(F \cup \underbrace{(G \cup D)}_{H})$$

or $F \cap H \neq \emptyset$ et d'après 1 :

$$Aff(F \cup (G \cup D)) = N + (\vec{F} + \overrightarrow{Aff(G \cup D)})$$

$$= N + \vec{F} + \vec{G} + \vec{D}$$

$(G \cap D \neq \emptyset)$. Rmq : $\vec{D} \not\subset \vec{F} + \vec{G}$.

Applications Affines

Rappel : Considérons le cas standard : $E = \vec{E}$ et $\vec{ab} = b - a$.

Une application $g : E \to E$ est dite affine si elle est du type : $g(x) = a + f(x)$ avec f linéaire.

(c.à.d composée d'une application linéaire et d'une translation).

Notons que $a = g(0)$, donc g est affine ssi elle a la forme

$$g(x) = g(0) + f(x), \text{ avec } f \text{ linéaire}$$

Dans le cas général on pose donc :

Définition :

Soient E, E' deux espaces affines de directions $\vec{E}, \vec{E'}$.

Une application $g : E \to E'$ est dite affine, s'il existe un point $O \in E$ et une application $f \in \mathcal{L}(\vec{E}, \vec{E'})$ tels que :

$$g(P) = g(O) + f(\vec{OP}) \quad \forall P \in E.$$

Si cette relation est vraie pour un point O, alors elle est vraie pour tout point O'.

f est dite partie linéaire de g.

En effet soit $O' \in E$, $O' = O + \vec{OO'}$ et on a :

$$g(P) = g(O) + f(\vec{OP}) = g(O) + f(\vec{OO'} + \vec{O'P})$$
$$= \underbrace{g(O) + f(\vec{OO'})}_{= g(O')} + f(\vec{O'P})$$

$$\Rightarrow g(P) = g(O') + f(\vec{O'P})$$

Notation : d'habitude on note $\vec{g}$ la partie linéaire de g, donc g est affine ssi $\forall Q \in E$

$$g(P) = g(Q) + \vec{g}(\vec{QP}) \quad \text{où } \vec{g} \text{ est linéaire}$$

D'après la définition de $\vec{QP}$, cela veut dire :

$$\vec{g}(\vec{QP}) = \overrightarrow{g(Q)\,g(P)}$$

Donc, on peut poser la déf. suivante :

Déf : Une application $g : E \to E'$ est dite <u>affine</u> ssi l'application $\vec{g} : \vec{E} \to \vec{E'}$ définie par :

$$\vec{g}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{g(P)g(Q)}$$

est linéaire.

<u>Théorème</u> :

Une application $g : E \to E'$ entre des esp. affines est affine <u>ssi</u> elle conserve le barycentre, c'est-à-dire $\forall P_1, .., P_k \in E$ et $\forall t_1, .., t_k \in \mathbb{K}$ t.q. $t_1 + \dots + t_k \doteq t \neq 0$, on a :

$$g\left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k} t_i P_i\right) = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k} t_i\, g(P_i).$$

<u>Preuve</u> :

1. Montrons que toute application affine conserve le barycentre.

Soit $g(P) = g(O) + \vec{g}(\overrightarrow{OP})$ affine (et donc $\vec{g}$ est linéaire) et soit $G = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k} t_i P_i \equiv O + \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{OP_i}$. Alors :

$$g(G) = g(O) + \vec{g}\left(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k} t_i \overrightarrow{OP_i}\right) = g(O) + \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k} t_i\, \vec{g}(\overrightarrow{OP_i})$$

$$= g(O) + \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k} t_i\, \overrightarrow{g(O)g(P_i)}$$

$$= \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{k} t_i\, g(P_i) \quad \text{d'après la déf. de barycentre.}$$

2. Réciproquement, supposons que g conserve les barycentres de toute famille de points avec coeff. $t_1, \dots, t_k$ t.q. $t_1 + \dots + t_k = 1$ et montrons que g est affine.

Fixons $O \in E$ et soit $\vec{g}$ définie par $\vec{g}(\overrightarrow{OP}) \doteq \overrightarrow{g(O)g(P)}$.

Il s'agit de montrer que $\vec{g}$ est linéaire.

(a) Considérons le barycentre des points P, Q, O avec coeff. $1, 1, -1$:

$$P + Q - O = O + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OO} = O + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

On a : $g(P+Q-O) = g(O+\vec{OP}+\vec{OQ}) = g(O)+\vec{g}(\vec{OP}+\vec{OQ})$

D'autre part, g conserve le barycentre, donc :

$$
\begin{aligned}
g(P+Q-O) &= g(P)+g(Q)-g(O) \\
&= g(O)+\vec{g}(\vec{OP})+\cancel{g(O)}+\vec{g}\,\vec{OQ}-\cancel{g(O)} \\
&= g(O)+\overrightarrow{g(O)g(P)}+\overrightarrow{g(O)g(Q)} \\
&= g(O)+\vec{g}(\vec{OP})+\vec{g}(\vec{OQ})
\end{aligned}
$$

Donc $\vec{g}(\vec{OP}+\vec{OQ}) = \vec{g}(\vec{OP})+\vec{g}(\vec{OQ})$

(b) Fixons $O \in E$ et considérons le barycentre des points P et O avec coefficients λ et $1-\lambda$.

On a :

$$g(\lambda P+(1-\lambda)O) = g(O+\lambda\vec{OP}+(1-\lambda)(\vec{OO})) = g(O)+\vec{g}(\lambda\vec{OP})$$

d'autre part, on a aussi :

$$
\begin{aligned}
g(\lambda P+(1-\lambda)O) &= \lambda g(P)+(1-\lambda)g(O) \overset{\text{déf}}{=} g(O)+\lambda\overrightarrow{g(O)g(P)}+(1-\lambda)\overrightarrow{g(O)g(O)} \\
&= g(O)+\lambda\overrightarrow{g(O)g(P)} \\
&= g(O)+\lambda\vec{g}(\vec{OP})
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \vec{g}(\lambda\vec{OP}) = \lambda\vec{g}(\vec{OP})$

$\Rightarrow \vec{g}$ est linéaire. ■

Propriétés élémentaires des applications affines

Prop : Soit $f : E \to E$ une application affine avec partie linéaire $\vec{f}$. Alors :

1. f est injective $\Leftrightarrow$ $\vec{f}$ est injective
2. f est surjective $\Leftrightarrow$ $\vec{f}$ est surjective
3. f est bijective $\Leftrightarrow$ $\vec{f}$ est bijective.

Preuve : D'après la déf d'esp. affine, l'application $\theta_O : E \to \vec{E}$ déf par $\theta_O(P) = \vec{OP}$ est bijective. À l'aide de θ_O, l'identité $\vec{f}(\vec{OP}) = \overrightarrow{f(O)f(P)}$ peut s'écrire : $\vec{f}(\theta_O(P)) = \theta_{f(O)}(f(P))$ et donc :

$$\vec{f} = \theta_{f(O)} \circ f \circ \theta_O^{-1}(P).$$

D'où on déduit immédiatement le résultat. ■

Prop: Soient $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications affines. Alors:

(a) $g \circ f$ est affine et sa partie linéaire est $\vec{g} \circ \vec{f}$;

(b) si g est bijective (et affine), g^{-1} est affine et sa partie linéaire est $\vec{g}^{-1}$; c'est-à-dire:

(a) $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$

(b) $\overrightarrow{g^{-1}} = \vec{g}^{-1}$

(En particulier $\overrightarrow{Id_E} = Id_{\vec{E}}$)

Preuve:

(a) Il nous faut montrer que l'application $\overrightarrow{g \circ f}$ définie par

$$\overrightarrow{g \circ f}(\overrightarrow{PQ}) \doteq \overrightarrow{(g \circ f)(P)\,(g \circ f)(Q)}$$

est linéaire. Or:

$$\overrightarrow{g \circ f}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{(g \circ f)(P)\,(g \circ f)(Q)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } g \\ \text{est affine}}}{=} \vec{g}\left(\overrightarrow{f(P)f(Q)}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } f \text{ est} \\ \text{affine}}}{=} (\vec{g} \circ \vec{f})(\overrightarrow{PQ})$$

donc: $\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}$ et par conséquence $\overrightarrow{g \circ f}$ est linéaire car composée de deux applications linéaires.

(b) Soit g bijective et notons $f = g^{-1}$. Il s'agit de montrer que $\vec{f}$ est linéaire. Puisque $g \circ f = Id_E$, on a $\vec{g} \circ \vec{f} = Id_{\vec{E}} = \overrightarrow{Id_E}$ donc $\vec{f}$ est linéaire car elle est l'inverse de $\vec{g}$. Cela montre aussi que $\overrightarrow{g^{-1}} = \vec{f} = \vec{g}^{-1}$.

Corollaire:

L'ensemble des applications affines bijectives est un groupe, pour la loi de composition des applications, dit Groupe Affine, noté GA(E)

Point fixes :

Un rôle important dans l'étude des applications affines est joué par les points fixes.

Proposition: Soit $f : E \to E$ une application affine et notons : $\mathrm{Fix}(f) = \{\text{points fixes de } f\}$. Alors :

1. Si f admet un point fixe Ω, alors :
$$\mathrm{Fix}(f) = \Omega + \mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}}) = \Omega + E_1^{\vec{f}},$$
où $E_1^{\vec{f}}$ = esp. propre de $\vec{f}$ associé à 1, c'est-à-dire l'ensemble des points fixes, soit il est vide, soit il est un sous-espace affine de direction $E_1^{\vec{f}}$.

2. En dimension finie, f a <u>un et un seul</u> point fixe ssi 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$.

Preuve :

1. Soit Ω point fixe de f. Alors $f(P) = f(\Omega) + \vec{f}(\overrightarrow{\Omega P}) = \Omega + \vec{f}(\Omega$

Donc

P est fixe $\iff \vec{f}(\overrightarrow{\Omega P}) = \overrightarrow{\Omega P} \iff \overrightarrow{\Omega P} \in E_1^{\vec{f}} \iff P \in \Omega + E_1^{\vec{f}}$.

ok

2. Supposons que f admet un seul point fixe Ω. Donc, d'après 1. on a $E_1^{\vec{f}} = \{\vec{0}\}$.

Réciproquement, si $E_1^{\vec{f}} = \{\vec{0}\}$, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}}) = \{\vec{0}\}$, <u>en dimension finie</u>, ça est équivalent à : $\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}}$ est bijective.

Prénons un point O arbitraire et soit Ω un point quelconque.

On a :
$$\vec{f}(\overrightarrow{O\Omega}) = \overrightarrow{f(O)f(\Omega)} = \overrightarrow{f(O)\Omega} + \overrightarrow{\Omega f(\Omega)}$$
$$= \overrightarrow{f(O)O} + \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega f(\Omega)}$$

c'est-à-dire :
$$(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}})(\overrightarrow{O\Omega}) = \overrightarrow{f(O)O} + \overrightarrow{\Omega f(\Omega)}$$
et donc les points fixes Ω sont les solutions du système :
$$(\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}})(\overrightarrow{O\Omega}) = \overrightarrow{f(O)O},$$
qui a une solution $\overset{\Omega = O + \overrightarrow{O\Omega}}{\text{unique}}$ (puisque $\vec{f} - \mathrm{Id}_{\vec{E}}$ est bijective) donnée par :

Groupe Affine. Le groupe des homothéties – translations

Translations :

Déf : Soit E un espace affine et $\vec{v} \in \vec{E}$. On appelle <u>translation de vecteur $\vec{v}$</u> l'application $T_{\vec{v}} : E \to E$ déf. par
$$T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v} \qquad \forall P \in E.$$

La partie linéaire d'une translation est $Id_{\vec{E}}$, c'est-à-dire : $\vec{T_{\vec{v}}} = Id_{\vec{E}}$.

En effet, $T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}$ signifie que $\vec{v} = \overrightarrow{P T_{\vec{v}}(P)}$, donc :
$$\vec{T_{\vec{v}}}(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{T_{\vec{v}}(P) T_{\vec{v}}(Q)} = \overrightarrow{T_{\vec{v}}(P)(P)} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{Q T_{\vec{v}}(Q)}$$
$$= -\vec{v} + \overrightarrow{PQ} + \vec{v} = \overrightarrow{PQ}.$$

On a aussi le réciproque.

Proposition : Une application affine f est une translation ssi $\vec{f} = Id_{\vec{E}}$. $\boxed{\text{cf Exo 7}}$

Preuve :

En effet, supposons que $\vec{f} = Id_{\vec{E}}$ et montrons qu'il existe $\vec{v} \in \vec{E}$ t.q. $f(P) = P + \vec{v}$ pour tout $P \in E$.

Si un tel $\vec{v}$ existe, cela veut dire que $\vec{v} = \overrightarrow{P f(P)}$.

Soit donc P point quelconque de E et posons $\vec{v} = \overrightarrow{P f(P)}$.

Montrons que $\vec{v}$ ne dépend pas du choix de P. En fait, on a :
$$\overrightarrow{Q f(Q)} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{P f(P)} + \overrightarrow{f(P) f(Q)} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{P f(P)} + \vec{f}(\overrightarrow{PQ})$$
$$= \cancel{\overrightarrow{QP}} + \overrightarrow{P f(P)} + \cancel{\overrightarrow{PQ}}$$
$$= \overrightarrow{P f(P)}$$

Comme $\overrightarrow{P f(P)} = \vec{v} \quad \forall P \in E$, on a : $f(P) = P + \vec{v} \quad \forall P \in E$. ∎

Homothéties.

Déf: Une application affine $f: E \to E$ est dite homothétie de centre Ω et de rapport $k \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$, s'il existe un point Ω tel que:

$$f(P) = \Omega + k\,\overrightarrow{\Omega P}.$$

Remarques: 1. Ω est un point fixe

2. $\vec{f} = k\,Id_{\vec{E}}$.

En fait, 1. est évident. D'autre part, puisque f est affine, pour tout $O \in E$ on a $f(P) = f(O) + \vec{f}(\overrightarrow{OP})$. En prenant $O = \Omega$, on a:

$$f(P) = f(\Omega) + \vec{f}(\overrightarrow{\Omega P}) = \Omega + \vec{f}(\overrightarrow{\Omega P})$$

et comme $f(P) = \Omega + k\,\overrightarrow{\Omega P}$ on a $\vec{f}(\overrightarrow{\Omega P}) = k\,\overrightarrow{\Omega P}$, c'est-à-di[re] $\vec{f} = k\,Id_{\vec{E}}$. Nous allons voir que en fait on a aussi la réciproque.

Prop: f est une homothétie si et seulement si $\vec{f} = k\,Id_{\vec{E}}$ $(k \notin \{0,1\})$

Preuve: Si $\vec{f} = k\,Id_{\vec{E}}$, alors 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$ et donc f a un unique point fixe. En le notant Ω, on a

$$f(P) = \underbrace{f(\Omega) + \vec{f}(\overrightarrow{\Omega P})}_{\text{par déf d'appl. affine}} = \Omega + k\,\overrightarrow{\Omega P}.$$ Donc f est une homothétie ■

Notation: On notera l'homothétie de centre Ω et rapport k: $H_{\Omega,k}$.

Rémarque: Les translations forment un sous-groupe de $Aff(E)$, car $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{w}} = T_{\vec{v}+\vec{w}}$ et $T_{\vec{v}}^{-1} = T_{-\vec{v}}$.

Par contre, les homothéties ne forment pas un groupe. En effet, $\overrightarrow{H_{\Omega_1,k_1} \circ H_{\Omega_2,k_2}} = \overrightarrow{H_{\Omega_1,k_1}} \circ \overrightarrow{H_{\Omega_2,k_2}} = k_1 k_2\, Id_{\vec{E}}$ et donc, si $k_1 k_2 = 1$ on n'a pas une homothétie mais une translation.

Corollaire: L'ensemble des homothéties et des translations est

Exercises:

1. On suppose $k_1 k_2 \neq 1$. Calculer le centre de l'homothétie $f = H_{\Omega_1,k_1} \circ H_{\Omega_2,k_2}$.

Sol: $k_1 k_2 \neq 1$ donc f est bien une homothétie.

Elle admet donc un unique point fixe Ω qui est son centre. Donc Ω est donné par $O + \overrightarrow{O\Omega}$ et:

$$\overrightarrow{O\Omega} = (\vec{f} - Id_{\vec{E}})^{-1}\, \overrightarrow{f(O)O}$$

O étant un point arbitraire. En prenant $O = \Omega_2$, on aura donc

$$\overrightarrow{\Omega_2\Omega} = (\vec{f} - Id_{\vec{E}})^{-1}\, \overrightarrow{f(\Omega_2)\Omega_2}$$

Or $\vec{f} = k_1 k_2\, Id_{\vec{E}}$, donc: $(\vec{f} - Id_{\vec{E}})^{-1} = \dfrac{1}{k_1 k_2 - 1} Id_{\vec{E}}$.

D'autre part $f(\Omega_2) = H_{\Omega_1,k_1} \circ H_{\Omega_2,k_2}(\Omega_2)$

$$= H_{\Omega_1,k_1}(\Omega_2) = \Omega_1 + k_1 \overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}.$$

Et donc:

$$\overrightarrow{\Omega_2\Omega} = \frac{1}{k_1k_2-1}\, \overrightarrow{(\Omega_1 + k_1\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2})\Omega_2}$$

$$= \frac{1}{k_1k_2-1}\left(\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2} - k_1\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}\right) = \frac{1-k_1}{k_1k_2-1}\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$$

$\boxed{\text{car } \overrightarrow{(P+\vec{v})Q} = \overrightarrow{PQ} - \vec{v}}$

Donc: $\Omega = \Omega_2 + \dfrac{1-k_1}{k_1 k_2 - 1}\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$

□

2. Calculer le centre Ω' de l'homothétie $f = T_{\vec{v}} \circ H_{\Omega,k}$.

Sol: On a $\vec{f} = \vec{H}_{\Omega,k} = k\, Id_{\vec{E}}$ donc f est une homothétie.

On a $f(\Omega) = T_{\vec{v}}(H_{\Omega,k}(\Omega)) = T_{\vec{v}}(\Omega) = \Omega + \vec{v}$

Le centre Ω' est donné par $\Omega' = \Omega + \overrightarrow{\Omega\Omega'}$ où

$$\overrightarrow{\Omega\Omega'} = (\vec{f} - Id_{\vec{E}})^{-1}\, \overrightarrow{f(\Omega)\Omega}.$$

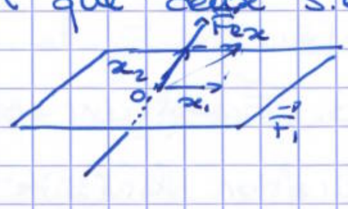
On a: $\overrightarrow{f(\Omega)\Omega} = \overrightarrow{(\Omega+\vec{v})\Omega} = -\vec{v} + \overrightarrow{\Omega\Omega} = -\vec{v}$

$(\vec{f} - Id_{\vec{E}})^{-1} = \dfrac{1}{k-1} Id_{\vec{E}} \Rightarrow \overrightarrow{\Omega\Omega'} = -\dfrac{1}{k-1}\vec{v} \Rightarrow \Omega' = \Omega - \dfrac{1}{k-1}\vec{v}.$

<u>Remarque</u>. Deux homothéties ne commutent jamais, mais une homothétie et une translation commutent toujours.

<u>Sous-espaces affines supplémentaires</u>

<u>Rappel</u>: Soit $\vec{E}$ un esp. vectoriel. On dit que deux s.e.v. $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ sont <u>supplémentaires</u> si $\vec{E} = \vec{F_1} \oplus \vec{F_2}$



ce qui est équivalent à :

1. $\vec{E} = \vec{F_1} + \vec{F_2} \equiv Vect(\vec{F_1} \cup \vec{F_2})$
2. $\vec{F_1} \cap \vec{F_2} = \{\vec{0}\}$.

ou aussi à : $\forall x \in \vec{E}$, x se décompose d'une <u>manière unique</u> en $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \vec{F_1}$ et $x_2 \in \vec{F_2}$.

<u>Déf</u>. Soit E un esp. affine et F_1, F_2 deux sous-espaces affines de E. On dit que F_1 et F_2 sont <u>supplementaires</u> si les directions sont supplémentaires, c.-à-d. $\vec{E} = \vec{F_1} \oplus \vec{F_2}$.

<u>Prop</u>: F_1 et F_2 sont supplementaires <u>SSI</u>:

1. $E = Aff(F_1 \cup F_2)$
2. $F_1 \cap F_2 = \{M_0\}$.

<u>Preuve</u>: Supposons 1. et 2. Comme $F_1 \cap F_2 \neq \phi$, d'après le théorème d'incidence on a : $Aff(F_1 \cup F_2) = M_0 + \vec{F_1} + \vec{F_2}$, c'est-à-dire $E = M_0 + \vec{F_1} + \vec{F_2}$ et par consequence $\vec{E} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$.

D'autre part, $\overrightarrow{F_1 \cap F_2} = \vec{F_1} \cap \vec{F_2} = \overrightarrow{\{M_0\}} = \{\vec{0}\} \Rightarrow \vec{E} = \vec{F_1} \oplus \vec{F_2}$ $\boxed{ok}$

Réciproquement, si $\vec{E} = \vec{F_1} \oplus \vec{F_2}$, montrons d'abord que $F_1 \cap F_2 \neq \phi$.

On a : $F_1 \cap F_2 \neq \phi \iff \forall P_1 \in F_1 \ \forall P_2 \in F_2 \quad \overrightarrow{P_1P_2} \in \vec{F_1} + \vec{F_2}$,

mais $\vec{E} = \vec{F_1} + \vec{F_2} \Rightarrow$ cette rélation est toujours satisfaite $\Rightarrow F_1 \cap F_2 \neq \phi$

$\Rightarrow \exists M_0 \in F_1 \cap F_2 \Rightarrow F_1 \cap F_2 = M_0 + \overrightarrow{F_1 \cap F_2} = M_0 + \vec{F_1} \cap \vec{F_2} = M_0 + \{\vec{0}\} = \{M_0\}$

D'autre part, d'après le théorème d'incidence :

$F_1 \cap F_2 \neq \phi \Rightarrow Aff(F_1 \cup F_2) = M_0 + \vec{F_1} + \vec{F_2} = M_0 + \vec{E} = E$.

Corollaire : Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces affines supplémentaires de E, alors tout élément $M \in E$ s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$M = M_0 + \vec{v_1} + \vec{v_2} \quad \text{avec } \{M_0\} = F_1 \cap F_2 \,,\ \vec{v_1} \in \vec{F_1} \,,\ \vec{v_2} \in \vec{F_2}$$

Projecteurs

Rappel : Si $\vec{E}$ est un esp. vectoriel, on appelle projecteur une application linéaire $\vec{p} : \vec{E} \to \vec{E}$ t.q. $\vec{p} \neq Id$ et $\vec{p}^2 = \vec{p}$.

Le polynôme $(X-1)X$ étant un annulateur de $\vec{p}$, on a, d'après le Lemme des Noyaux :

$$\vec{E} = Ker(\vec{p} - Id_{\vec{E}}) \oplus Ker(\vec{p}). \quad (*)$$

Réciproquement, si $\vec{E} = \vec{F_1} \oplus \vec{F_2}$ avec $\vec{F_i} \neq \{\vec{0}\}$, alors $\forall \vec{x} \in \vec{E}$ $\exists! \vec{x_1} \in \vec{F_1}$ $\exists! \vec{x_2} \in \vec{F_2}$ t.q. $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$, et l'application $\vec{p} : \vec{E} \to \vec{E}$ déf par $\vec{p}(\vec{x}) = \vec{x_1}$ est un projecteur et l'on a

$$\vec{F_1} = Ker(\vec{p} - Id_{\vec{E}}) \qquad \vec{F_2} = Ker(\vec{p}).$$

Déf. Soit E un esp. affine. On appelle projecteur une application affine $p : E \to E$ telle que $p \neq Id_E$ et $p^2 = p$.

(*) Théorème des noyaux

$f \in L(\vec{E}, \vec{E})$, $P_i \in \mathbb{K}[X]$, $i = 1, .., n$ premiers entre eux, 2 à 2.

Alors $Ker\left(\left(\prod_{i=1}^{n} P_i\right)(f)\right) = \bigoplus_{i=1}^{n} Ker(P_i(f))$.

Faire Exo 8 :

Prop : Soit E esp. affine. Alors une application affine $p : E \to E$ est un projecteur ssi il existe deux sous-esp. affines supplémentaires F_1 et F_2, tels que $\forall M \in E$, $p(M) \in F_1$ et $\overrightarrow{M\,p(M)} \in \vec{F_2}$.

Preuve :

Soit p projecteur affine, donc $\vec{p}^2 = \vec{p}$ et $\vec{p}$ est un projecteur vectoriel (i.e., linéaire) et $\vec{E} = \mathrm{Ker}(\vec{p} - Id_{\vec{E}}) \oplus \mathrm{Ker}(\vec{p})$.

Notons $\vec{F_1} = \mathrm{Ker}(\vec{p} - Id_{\vec{E}})$ et $\vec{F_2} = \mathrm{Ker}(\vec{p})$ et soit $M_0 \in \mathrm{Fix}(f)$.
($\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$ car $p^2 = p$, donc tout point de $p(E)$ est fixe).

Posons $F_1 = M_0 + \vec{F_1}$ et $F_2 = M_0 + \vec{F_2}$.

Puisque $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ sont supplémentaires, F_1 et F_2 sont supplémentaires.

Soit $M = M_0 + \vec{v_1} + \vec{v_2}$ avec $\vec{v_i} \in \vec{F_i}$ $i = 1, 2$. On a :

$$p(M) = p(M_0) + \vec{p}(\vec{v_1} + \vec{v_2}) = M_0 + \vec{v_1} \in F_1$$

D'autre part, $\vec{p}\left(\overrightarrow{p(M)M}\right) = \overrightarrow{p^2(M)\,p(M)} = \overrightarrow{p(M)\,p(M)} = \vec{0}$

et donc $\overrightarrow{p(M)M} \in \mathrm{Ker}(\vec{p}) = \vec{F_2}$. $\boxed{\text{ok}}$

Réciproquement, si $\exists F_1, F_2$ supplémentaires et $p : E \to E$ affine t.q. $\forall M \in E$ $p(M) \in F_1$ et $\overrightarrow{p(M)M} \in \vec{F_2}$, soit $M_0 = F_1 \cap F_2$, donc $F_1 = M_0 + \vec{F_1}$ et $F_2 = M_0 + \vec{F_2}$. On a :

$p(M_0) \in F_1$ et $\overrightarrow{p(M_0)M_0} \in \vec{F_2}$, c'est-à-dire

$p(M_0) = M_0 + \overrightarrow{M_0\,p(M_0)} \Rightarrow p(M_0) \in F_2 \Rightarrow p(M_0) \in F_1 \cap F_2 \Rightarrow p(M_0) = M_0$.

Montrons que $p^2 = p$. Puisque F_1 et F_2 sont supplémentaires, tout $M \in E$ peut s'écrire de façon unique comme :

$$M = M_0 + \vec{v_1} + \vec{v_2} \quad \text{avec } \vec{v_i} \in \vec{F_i}.$$

Or $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0\,p(M)} + \underbrace{\overrightarrow{p(M)M}}_{\in\,\vec{F_2}}$ c-à-d. $M = M_0 + \overrightarrow{M_0\,p(M)} + \overrightarrow{p(M)M}$

mais $p(M) \in F_1 = M_0 + \vec{F_1} \Rightarrow \overrightarrow{M_0\,p(M)} \in \vec{F_1}$. Donc, par unicité de la décomposition, on a $p(M) = M_0 + \vec{v_1}$ $\left(p(M) = M_0 + \overrightarrow{M_0\,p(M)}\right)$

Or $p(M) = p(M_0) + \vec{p}(\vec{v_1} + \vec{v_2}) \Rightarrow \vec{p}(\vec{v_1} + \vec{v_2}) = \vec{v_1}$

$\Rightarrow p^2(M) = p(M_0) + \vec{p}(\vec{v_1}) = M_0 + \vec{v} = p(M)$.

Symétries :

Rappel :

Soit $\vec{E}$ un esp. vectoriel. On appelle symétrie vectorielle toute application linéaire $\vec{s} : \vec{E} \to \vec{E}$ t.q. $\vec{s}^2 = Id_{\vec{E}}$ et $\vec{s} \neq Id_{\vec{E}}$.

D'après le Lemme des Noyaux, on a donc :

$$\vec{E} = Ker(\vec{s} - Id_{\vec{E}}) \oplus Ker(\vec{s} + Id_{\vec{E}})$$
$$= \vec{E}_1^{(\vec{s})} \oplus \vec{E}_{-1}^{(\vec{s})}.$$

Tout élément $\vec{x}$ de $\vec{E}$ se décompose donc d'une manière unique comme $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ avec $\vec{x}_1 \in Ker(\vec{s} - Id_{\vec{E}})$

$\vec{x}_2 \in Ker(\vec{s} + Id_{\vec{E}})$.

En appliquant $\vec{s}$ on a :

$\vec{s}(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, d'où $\vec{x}_1 = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{s}(x))$ et $\vec{x}_2 = \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{s}(x))$

Déf : Soit E un esp. affine. Une application affine $s : E \to E$ est dite symétrie si $s^2 = Id_E$ et $s \neq Id_E$.

Prop : Soit $s : E \to E$ affine. Si s est une symétrie alors il existe deux sous-esp. affines supplémentaires F et G t.q. $\forall M \in E$, $s(M)$ est le point de E t.q. $\overrightarrow{Ms(M)} \in \vec{G}$ et le milieu du segment $\overrightarrow{M\,s(M)}$ (c-à-d. le point $B = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}s(M)$) appartient à F.

Preuve :

Si s est une symétrie affine, alors B est fixe, car $s(B) = \frac{1}{2}s(M) + \frac{1}{2}s^2(M)$ $= \frac{1}{2}s(M) + \frac{1}{2}M = B$. Donc $Fix(s) \neq \phi$.

Soit M_0 un point fixe et considérons $Fix(s) = M_0 + Ker(\vec{s} - Id_{\vec{E}})$.

Soient $\vec{F} = Ker(\vec{s} - Id_{\vec{E}})$, $\vec{G} = Ker(\vec{s} + Id_{\vec{E}})$, et

$F = M_0 + \vec{F} = Fix(s)$ et $G = M_0 + \vec{G}$.

Comme $\vec{s}^2 = Id_{\vec{E}}$, $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont supplémentaires dans $\vec{E}$, donc F et G sont supplémentaires dans E. Le point $B = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}s(M)$

Enfin, si $M = M_0 + \overrightarrow{M_0M}$ on a

$$\overrightarrow{s(M)M} = \overrightarrow{s(M)M_0} + \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{s(M)s(M_0)} + \overrightarrow{M_0M}$$
$$= \vec{s}(\overrightarrow{MM_0}) - Id_{\vec{E}}(\overrightarrow{MM_0})$$
$$= (\vec{s} - Id_{\vec{E}})(\overrightarrow{MM_0})$$

$\Rightarrow \overrightarrow{s(M)M} \in \vec{G}$ car $(\vec{s} + Id_{\vec{E}})(\overrightarrow{s(M)M}) = (\vec{s} + Id_{\vec{E}})(\vec{s} - Id_{\vec{E}})\overrightarrow{MM_0}$
$= \vec{0}$.

$\boxed{\text{Faire exo 10}}$

Quelques théorèmes célèbres en géométrie affine

Le Théorème de Thalès :

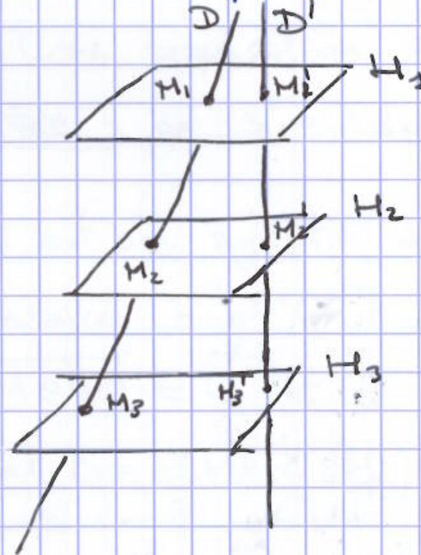
Déf : Soit D une droite affine et P, Q, R trois points distincts de D. Puisque les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont colinéaires, il existe λ t. q. $\overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{PR}$. On pose alors $\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\overrightarrow{PR}} = \lambda$.

Théorème de Thalès :

Soit E un esp. affine, H_1, H_2, H_3 trois hyperplanes (c-à-d. sous-esp. affines de dim $=$ dim $E - 1$) parallèles de direction $\vec{H}$ et D, D' deux droites quelconques non parallèles aux hyperplanes.

Alors : $H_i \cap D = \{M_i\}$ et $H_i \cap D' = \{M_i'\}$ $i = 1, 2, 3$ et

$$\frac{\overrightarrow{M_1 M_3}}{\overrightarrow{M_1 M_2}} = \frac{\overrightarrow{M_1' M_3'}}{\overrightarrow{M_1' M_2'}}$$



On montrera ce théorème dans le cas de dimension 2. Voir [exo 9].

Remarques :

1. On peut évidemment permuter les rôles des M_i et on aura aussi : $\dfrac{\overrightarrow{M_2 M_3}}{\overrightarrow{M_2 M_1}} = \dfrac{\overrightarrow{M_2' M_3'}}{\overrightarrow{M_2' M_1'}}$.

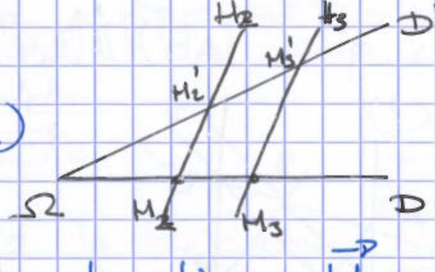
2. Cas dégénéré : $M_1 = M_1'$ dans ce cas, H_1 est inutile et on a toujours $\dfrac{\overrightarrow{M_1 M_3}}{\overrightarrow{M_1 M_2}} = \dfrac{\overrightarrow{M_1' M_3'}}{\overrightarrow{M_1' M_2'}}$.

Applications du Théorème de Thalès

1. Construction graphique de l'image d'un point par une homothétie.

Soit $H_{\Omega,k}$ l'homothétie de centre Ω et rapport k et soit $M_3 = H_{\Omega,k}(M_2)$. Soit M_2' un point qui n'appartient pas à la droite (ΩM_2). On veut construire le point $M_3' = H_{\Omega,k}(M_2')$

On prends les droites



$D = (\Omega M_2)$ et $D' = (\Omega M_2')$

Considerons en suite

les droites H_2 et H_3 de direction $\vec{H} =$ direction $\overrightarrow{M_2 M_2'}$ passant respectivement par M_2 et M_3. Alors H_3 rencontre D' au point $M_3' = H_{\Omega,k}(M_2')$. [montrer comme exo!].

2. Caractérisation du groupe des homothéties-translations.

Théorème.

Soit E un esp. affine de dimension $n \geq 2$.

Le groupe des homothéties-translations est le sous-groupe de $GA(E)$ qui transforme toute droite en une droite parallèle.

Preuve : $\boxed{\text{idée}}$

1. Il est un calcul de montrer que les translations et les homothéties conservent les parallélisme des droites. [exo].
2. Réciproquement, si f est une application affine bijective qui transforme toute droite en une droite parallèle, il nous faut montrer qu'elle est soit une translation, soit une homothétie. On a deux cas :

   (a) f a deux point fixes Ω et Ω' $\Rightarrow$ on montre que $f = Id_E$.

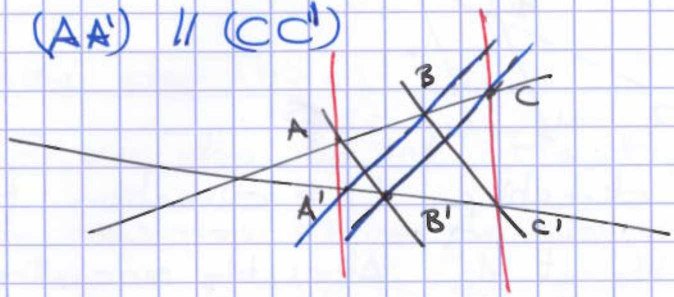
   (b) f a un seul point fixe Ω $\Rightarrow$ on montre que $f = H_{\Omega,a}$

(c) f n'a pas de point fixe. $\Rightarrow$ on montre que f est une translation.

$\square$

Théorème de Pappus.

Soient D et D' deux droites distinctes du plan affine.
Prenons trois points $A, B, C \in D$ et trois points $A', B', C' \in D'$ tels que $(AB') \parallel (BC')$ et $(BA') \parallel (CB')$.
Alors : $(AA') \parallel (CC')$



Preuve: $\boxed{\text{idée}}$:
Si les deux droites se rencontrent en un point O, on considère : H_1 = homothétie de centre O t.q. $H_1(A) = B$
H_2 = " " " " " " $H_2(B) = C$

$H_1 \circ H_2 = H_2 \circ H_1$ car elles ont le même centre O.
On a que : $H \overset{\text{déf}}{=} H_1 \circ H_2$ est t.q. $H(A) = C$ et $H(A') = C'$
Donc $H(AA') = (CC')$ et on conclude car les homothéties envoyent les droites dans des droites parallèle.
Si $D \parallel D'$ on raisonne de la même manière, mais en utilisant les translations.

$\square$

Théorème de Menelaüs :

Soit $(A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de E et prenons :

$$\begin{cases} B_0 \in (A_0 A_1), & B_0 \neq A_1 \\ B_1 \in (A_1 A_2), & B_1 \neq A_2 \\ \vdots & \\ B_n \in (A_{n-1} A_n), & B_n \neq A_n \end{cases}$$

Alors $(B_0, \dots, B_n)$ est un repère affine de E ssi

$$\frac{\overrightarrow{B_0A_0}}{\overrightarrow{B_0A_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{B_1A_1}}{\overrightarrow{B_1A_2}} \cdots \frac{\overrightarrow{B_nA_n}}{\overrightarrow{B_nA_0}} \neq 1.$$

Remarque : Si $\dim E = 2$ le théorème s'exprime aussi comme :

B_0, B_1, B_2 sont alignés ssi $\dfrac{\overrightarrow{B_0A_0}}{\overrightarrow{B_0A_1}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{B_1A_1}}{\overrightarrow{B_1A_2}} \cdot \dfrac{\overrightarrow{B_2A_2}}{\overrightarrow{B_2A_0}} = 1.$ (*)

Espaces Affines Euclidiens

Isométries, déplacements, similitudes.

Isométries:

Déf: Soit E un esp. affine. On dit que E est un esp. affine euclidien si $\vec{E}$ est un esp. euclidien.

Prop: Soit E esp. affine euclidien. Alors l'application
$$d : E \times E \to \mathbb{R} \quad \text{déf par} \quad d(P,Q) = \|\vec{PQ}\|$$
est une distance.

Preuve: la vérification est triviale.
Pour l'inégalité triangulaire on a:
$$d(P,Q) = \|\vec{PQ}\| = \|\vec{PR} + \vec{RQ}\| \leq \|\vec{PR}\| + \|\vec{RQ}\| = d(P,R) + d(R,Q).$$
□

Déf: Soient E, E' deux esp. affines euclidiens et $f : E \to E'$. On dit que f est une isométrie si elle conserve la distance, c'est-à-dire, si
$$d_{E'}(f(P), f(Q)) = d_E(P,Q) \quad \forall P,Q \in E.$$
Rmq: on ne demande pas que f soit affine.

Exemples:

1. Les translations sont des isométries.

En effet: $d(T_{\vec{v}}(P), T_{\vec{v}}(Q)) = \|\overrightarrow{(P+\vec{v})(Q+\vec{v})}\|$.

Or: $\overrightarrow{P(Q+\vec{v})} = \vec{PQ} + \vec{v}$ et donc:
$$\overrightarrow{(P+\vec{v})(Q+\vec{v})} = \overrightarrow{(P+\vec{v})Q} + \vec{v} = -\overrightarrow{Q(P+\vec{v})} + \vec{v} = \vec{PQ} - \vec{v} + \vec{v} = \vec{PQ}$$
$\Rightarrow d(T_{\vec{v}}(P), T_{\vec{v}}(Q)) = d(P,Q)$.

2. La composée de deux isométries est une isométrie

En fait: $d(g(f(P)), g(f(Q))) = d(f(P), f(Q)) = d(P,Q)$.

Nous allons voir que les isométries d'un esp. affine sont nécessairement affines et bijectives.

Théorème.

Soit E esp. affine euclidien et $f: E \to E$. Alors :

f est une isométrie $\iff$ f est affine et $\vec{f}$ est une isométrie vectorielle.

Dém.

($\Leftarrow$) Immédiat.

($\Rightarrow$) Il nous serve le lemme suivante :

Lemme : Soit $\vec{E}$ esp. vectoriel euclidien et soit $u : \vec{E} \to \vec{E}$ une application telle que :

(i) $u(\vec{0}) = \vec{0}$

(ii) $\|u(\vec{a}) - u(\vec{b})\| = \|\vec{a} - \vec{b}\| \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \vec{E}$.

Alors u est linéaire et conserve la norme (donc elle est orthogonale).

[Sans dém]

En admettant le lemme, il nous suffit montrer que $\vec{f}(\vec{0}) = \vec{0}$ et $\|\vec{f}(\vec{PQ}) + \vec{f}(\vec{RS})\| = \|\vec{PQ} + \vec{RS}\|$.

En fait, on a :

(i) $\vec{f}(\vec{0}) = \vec{f}(\vec{PP}) = \overrightarrow{f(P)f(P)} = \vec{0}$

(ii) Soient $\vec{v}, \vec{w} \in \vec{E}$. En fixant $O \in E$ on peut écrire $\vec{v} = \vec{OP}$ et $\vec{w} = \vec{OQ}$ et on a :

$$\|\vec{f}(\vec{v}) - \vec{f}(\vec{w})\| = \|\vec{f}(\vec{OP}) - \vec{f}(\vec{OQ})\| = \|\overrightarrow{f(O)f(P)} - \overrightarrow{f(O)f(Q)}\|$$

$$= \|-\overrightarrow{f(P)f(O)} - \overrightarrow{f(O)f(Q)}\|$$

$$= \|-\overrightarrow{f(P)f(Q)}\| = \|\overrightarrow{f(P)f(Q)}\| = d(f(P), f(Q)) = d(P,Q)$$

$$= \|\vec{PQ}\| = \|\vec{PO} + \vec{OQ}\| = \|\vec{w} - \vec{v}\| = \|\vec{v} - \vec{w}\| \quad \text{ok.}$$

Déplacements et similitudes

<u>Déf</u>: On appelle <u>déplacements</u> les isométries dont la partie linéaire est dans $SO(\vec{E})$.

<u>Rmq</u>: il est claire que les déplacements forment un sous-groupe du groupe $Is(E)$ des isométries de E.

<u>Déf</u>: Soit $k \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1\}$. On appelle <u>similitude de rapport k</u> une application $f: E \to E$ telle que

$$d(f(P), f(Q)) = k\, d(P, Q).$$

<u>Proposition</u>: f est une similitude <u>ssi</u> elle s'écrit sous la forme $f = H_{\Omega,k} \circ g$, où Ω est un point quelconque de E et g est une isométrie. En particulier, <u>les similitudes sont affines</u>.

<u>Dém</u>: $\boxed{\text{exo maison}}$.

Étude de $Is(E)$

<u>Décomposition des isométries.</u>

Vu que toute isométrie est une application affine, on peut l'écrire sous la forme:

$\forall M \in E \qquad f(M) = f(O) + \vec{f}(\vec{OM})$ où O est un point arbitraire et $\vec{f}$ est linéaire.

<u>On a deux cas</u>:

1. <u>S'il existe Ω point fixe pour f</u>, alors en prenant $O = \Omega$, on a $f(M) = f(\Omega) + \vec{f}(\vec{\Omega M}) = \Omega + \vec{f}(\vec{\Omega M})$, et <u>l'étude de f se ramène à celui de $\vec{f}$</u>.

Plus précisement, en vectorialisant en Ω, avec $\vartheta_\Omega(M) = \vec{\Omega M}$,
on a $\vartheta_\Omega(f(M)) = \overrightarrow{\Omega f(M)} = \overrightarrow{f(\Omega) f(M)} = \vec{f}(\vec{\Omega M}) = \vec{f}(\vartheta_\Omega(M))$
donc $f = \vartheta_\Omega^{-1} \circ \vec{f} \circ \vartheta_\Omega$, c'est-à-dire, en notant
$Is_\Omega(E) = \{\text{isométries de } E \text{ qui fixent } \Omega\} \subset Is(E)$ sous-groupe,
on a:
$$\boxed{Is_\Omega(E) = \vartheta_\Omega^{-1} \circ O(\vec{E}) \circ \vartheta_\Omega}$$

où $O(\vec{E})$ = groupe orthogonale de $\vec{E}$, et on a identifié le point M avec le vecteur $\vartheta_\Omega(M) = \vec{\Omega M}$.

2. <u>S'il n'y a pas de point fixe</u> : alors pour Ω point quelconque, on a $f(\Omega) \neq \Omega$ et le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{f(\Omega)\Omega}$ est non nul. Considérons donc l'application $g = T_{\vec{v}} \circ f$. On a:

$$g(\Omega) = T_{\vec{v}}(f(\Omega)) = f(\Omega) + \vec{v} = f(\Omega) + \overrightarrow{f(\Omega)\Omega} = \Omega$$

Donc g est affine avec Ω fixe et on peut écrire

$$f = T_{-\vec{v}} \circ g$$

et comme g admet un point fixe, son étude est reconduit à celui de sa partie linéaire, qui est une transf. orthogonale

<u>Proposition</u> : Toute isométrie est la composée d'une isométrie qui admet un point fixe par une translation (qui peut aussi être de vecteur nul)(*). Elle peut donc être "identifiée" au produit d'une translation par une application orthogonale.

(*) <u>Attention</u> : Ne commutent pas !

Plus précisement, en notant $Is(n) = \left\{\begin{array}{l}\text{groupe des isométries}\\ \text{d'un esp. affine euclidien}\\ \text{de dim } n\end{array}\right\}$

on a:

$\boxed{\text{dans } Is(2)}$: il y a:

- les isométries qui admettent au moins un point fixe Ω :
  $Is_\Omega(2) = \vartheta_\Omega^{-1} \circ O(2,\mathbb{R}) \circ \vartheta_\Omega$, qui sont de deux types:
  - celles qui proviennent des rotations de $\vec{E}$, qui on appellera <u>rotations de E</u> et l'on notera $R_{\Omega,\theta}$
  - et celles qui proviennent des réflexions de $\vec{E}$ par rapport à une droite, que l'on appellera <u>réflexions de E</u>, et l'on notera S_D.
- les translations

$\boxed{\text{dans } Is(3)}$: il y a :

- les isométries qui admettent au moins un point fixe Ω, $Is_\Omega(3) = \vartheta_\Omega^{-1} \circ O(3, \mathbb{R}) \circ \vartheta_\Omega$ et elle sont de 3 types :
  - celles qui proviennent des rotations de $\vec{E}$ autour d'un axe passant par O, de vecteur direction $\vec{k}$: il s'agit donc de rotations de E autour d'une droite affine passante par Ω et dirigée par $\vec{k}$, qui on notera $R_{\Omega, \vec{k}, \theta}$;
  - celles qui provionnent des réflexions de $\vec{E}$ par rapport à un plan, qu'on appelera <u>réflexions affines</u> ;
  - celles qui proviennent des "rotations - réflexions" de $\vec{E}$ (c'est-à-dire des rotations vectorielles de $\vec{E}$ suivies par une réflexion par rapport au plan de rotation) qui on appelera : <u>rotations - réflexions affines</u>
- les translations
- les composées de ces applications.

On va décrire en detaille $Is(2)$ et $Is(3)$.

Description de $Is(2)$

On considère E plan affine euclidien.

Considérons d'abord : les rotations $R_{\Omega,\theta}$ autour d'un point Ω, d'angle $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$ (c'est-à-dire $R_{\Omega,\theta} \neq Id_E$), et les réflexions S_D par rapport à une droite D.

Rmq : 1. les rotations sont caractérisées par avoir un seul point fixe.

2. les réflexions sont caractérisées par le fait d'avoir une droite fixe.

Nous allons étudier les composées de ces isométries avec une translation.

1er cas : $\boxed{f = T_{\vec{v}} \circ R_{\Omega,\theta}}$

On a : $\vec{f} = \vec{R}_{\Omega,\theta}$, dont la matrice dans une b.o.n. est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ qui n'a pas 1 comme valeur propre (car $\theta \neq 2\pi k$ $k \in \mathbb{Z}$), donc :

f a un unique point fixe, qui implique que f est une rotation autour d'un point Ω'. Pour trouver Ω' on utilise Ω et on a :

$$\Omega' = \Omega + (\vec{f} - Id_{\vec{E}})^{-1}\overrightarrow{f(\Omega)\Omega}$$
$$= \Omega + (\vec{f} - Id_{\vec{E}})^{-1}\overrightarrow{(\Omega+\vec{v})\Omega}$$
$$= \Omega - (\vec{f} - Id_{\vec{E}})^{-1}(\vec{v}).$$

2ème cas : $\boxed{f = T_{\vec{v}} \circ S_D}$

On a $\vec{f} = \vec{S}_D$ et donc 1 est valeur propre et par conséquent, soit f n'a pas de points fixes, soit en a une infinité.

Pour trouver les points fixes il nous faut résoudre $f(\Omega) = \Omega$, c'est-à-dire $T_{\vec{v}}(S_D(\Omega)) = \Omega$, d'où :

$$\vec{v} = \overrightarrow{S_D(\Omega)\Omega}$$

Or, $\overrightarrow{S_D(\Omega)\Omega}$ est orthogonal à $\vec{D}$ donc :
une condition nécessaire pour qu'il existe des points fixes est que : $\vec{v} \perp \vec{D}$.
Cette condition est aussi suffisante, car si $\vec{v} \perp \vec{D}$ on peut considérer le système dont les sol. sont les points fixes Ω : $S_D(\Omega) = \Omega - \vec{v}$. En prenant $O \in D$ comme origine, on peut écrire : $\vec{S}_D(\overrightarrow{O\Omega}) = \overrightarrow{O\Omega} - \vec{v}$ i.e.,

$$(\vec{S}_D - Id_{\vec{E}})\,\overrightarrow{O\Omega} = -\vec{v} \quad (*)$$

Dans une base orthogonale $(\vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} \in \vec{D}$, la matrice de $\vec{S}_D$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et donc si dans cette base $\Omega = (x_0, y_0)$ et $O = (0, 0)$, le système $(*)$ devienne

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne $\Omega = (\lambda, \frac{1}{2})$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, qui s'agit de la droite parallèle à D passant par le point

$$P = O + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

Et donc, puisque $\vec{f}$ a une droite fixe, elle est une réflexion par rapport à cette droite.

- Si $\vec{v} \notin \vec{D}^{\perp}$, alors $\vec{v} = \vec{v}_1 + \lambda\vec{u}$ où $\vec{v}_1 \perp \vec{D}$ et $\vec{u} \parallel D$ et on a : $f = T_{\vec{v}} \circ S_D = T_{\lambda\vec{u}} \circ \underbrace{T_{\vec{v}_1} \circ S_D}_{\text{réflexion}}$ $\quad \lambda \neq 0$.

$\Rightarrow$ f est le produit d'une réflexion par rapp. à une droite parallèle à D par une translation dans la direction de D, ce qui est dite une réflexion-glissement (ou simplement glissement).

Rmq : les glissements n'ont pas de points fixes car $\vec{v} \notin \vec{D}^{\perp}$.

On a ainsi :

Théorème :

Is (2) est composé de :

- l'identité
- des rotations autour d'un point [qui est le seul fixe]
- des réflexions par rapport à une droite [qui est la seule fixée]
- des glissements [pas de points fixes]
- et des translations [pas de points fixes]

Déscription de Is(3) :

On a vu que Is(3) est composé de :

$$O_\Omega(E) = \begin{cases} \text{- l'identité} \\ \text{- des rotations } R_{\Omega,\vec{k},\theta} \text{ avec } \theta \neq 2\pi h \ (h \in \mathbb{Z}) \\ \quad \text{de centre } \Omega, \text{ axe de dir. } \vec{k} \text{ et angle } \theta \\ \quad \text{(elles ont une droite fixe)} \\ \text{- des réflexions par rapport à un plan } S_P \\ \quad \text{(plan fixe)} \\ \text{- des "rotations-réflexions" } S_P \circ R_{\Omega,\vec{k},\theta} \\ \quad \text{où } P = \text{plan passant par } \Omega \text{ et orthogonal à } \vec{k} \\ \quad \text{(un seul point fixe)} \end{cases}$$

les composées de ces applications par les translations.

1er cas : $\boxed{f = T_{\vec{v}} \circ R_{\Omega,\vec{k},\theta}}$ $\quad \vec{f} = \overrightarrow{R_{\Omega,\vec{k},\theta}}$

1 est valeur propre $\Rightarrow$ $Fix(f) = \phi$ ou $Fix(f)$ est infini.

Ω' est fixe $\Leftrightarrow$ $\vec{v} = \overrightarrow{R_{\Omega,\vec{k},\theta}(\Omega')\Omega'}$

donc condition nécessaire pour que $Fix(f) \neq \phi$ est $\vec{v} \perp \vec{k}$.

Si $\vec{v} \perp \vec{k}$: dans un repère affine orthonormé $\left(\Omega, \frac{\vec{v}}{\|v\|}, \vec{w}, \vec{k}\right)$ il nous faut résoudre :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \|v\| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne $\begin{cases} (\cos(\theta) - 1)\, x_0 - \sin(\theta)\, y_0 = -\|v\| \\ \sin(\theta)\, x_0 + (\cos(\theta) - 1)\, y_0 = 0 \end{cases}$

qui a une seule sol (x_0, y_0) pour $\theta \neq 2\pi h$, $h \in \mathbb{Z}$.

z_0 est arbitraire $\Rightarrow$ droite D de points fixes de dir. $\vec{k}$.

Donc :

$$\boxed{\text{Si } \vec{v} \perp \vec{k},\ f \text{ est une rotation autour d'un axe } D \text{ de direction } \vec{k}}$$

Si $\vec{v}$ n'est pas orthogonal à $\vec{k}$: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \lambda\vec{k}$, $\lambda \neq 0$

$\vec{v}_1 \perp \vec{k} \Rightarrow T_{\vec{v}} \circ R_{\Omega,\vec{k},\theta} = T_{\lambda\vec{k}} \circ \underbrace{T_{\vec{v}_1} \circ R_{\Omega,\vec{k},\theta}}_{\text{rotation}}$

$\Rightarrow$ f est une rotation suivie d'une translation dans la dir. de l'axe, qui est dite vissage (pas de points fixes).

2ème cas : $\boxed{f = T_{\vec{v}} \circ S_{\vec{k}}}$ où $S_{\vec{k}}$ = réflexion par rapport au plan $\mathcal{P}$ orthogonal à $\vec{k}$

On a $\vec{f} = \vec{S}_{\vec{k}} \Rightarrow 1$ est val. propre $\Rightarrow Fix(f) = \emptyset$ ou $\# Fix(f) = +\infty$

Ω' est fixe $\Leftrightarrow \vec{v} = \overrightarrow{S_{\vec{k}}(\Omega')\Omega'}$

Or $\overrightarrow{S_{\vec{k}}(\Omega')\Omega'} \parallel \vec{k}$ donc :

$Fix(f) \neq \emptyset \Leftrightarrow \vec{v} \parallel \vec{k}$.

Si $\vec{v} \parallel \vec{k}$: dans le repère affine orthon. $\left(\Omega, \vec{u}, \vec{w}, \frac{\vec{v}}{\|v\|}\right)$

Ω' est fixe ssi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \|v\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

i.e. $2z_0 = \|v\|$ et x_0, y_0 arbitraires

le Plan $\mathcal{P}$ ayant équation $\{z=0\}$ dans ce repère, on a que les points fixes sont les points d'un plan $\parallel \mathcal{P}$ et f est une réflexion par rapport à ce plan.

Si $\vec{v} \nparallel \vec{k}$, $\vec{v} = \lambda\vec{k} + \vec{v}_1$ et on a :

$$f = T_{\vec{v}_1} \circ \underbrace{T_{\lambda\vec{k}} \circ S_{\vec{k}}}_{\text{réflexion}}$$

et f est une réflexion-glissement.

3ème cas : $\boxed{f = T_{\vec{v}} \circ (S_{\vec{k}} \circ R_{\Omega,\vec{k},\theta})}$

On a $\vec{f} = \overrightarrow{S_{\vec{k}} \circ R_{\Omega,\vec{k},\theta}} \Rightarrow 1$ n'est pas val. propre

$\Rightarrow Fix(f) = \{\Omega\} \Rightarrow$ f est une rotation-reflexion.

On a ainsi :

<u>Théorème</u> :

$Is(3)$ est composé de :

- l'identité
- des rotations autour d'un axe [droite fixe]
- des réflexions par rappor à un plan [plan fixe]
- des rotations-réflexions [un seul point fixe, centre, des plans et [illegible] invariants]
- des translations [$Fix = \phi$, infinité de plans et droites inv.].
- des vissages [$Fix = \phi$, unique droite invariante].
- et des réflexions-glissements [$Fix = \phi$, infinité de droites inv.
  1 seul plan inv.]

Groupes des isométries laissant invariant un ensemble

Soit E esp. affine euclidien et soit $Is(E)$ son groupe des isométries.

Déf: Soit $A \subseteq E$ sous-ensemble. Une isométrie $f \in Is(E)$ laisse A invariant si $f(A) = A$.

Proposition: L'ensemble $Inv(A)$ des isométries laissant invariant A est un sous-groupe de $Is(E)$.

La vérification est immédiate.

Exemple 1: [voir. Exo 6 (Feuille TD5) point 2]

Soit E plan affine euclidien et A, B deux points distincts de E. Déterminer $Inv(\{A,B\})$.

- Si A et B sont fixes, alors toute la droite $D = (AB)$ est fixe (car les points de D sont les barycentres de A et B et f conserve les barycentres car elle est affine).

Donc, compte tenu du théorème de description de $Is(2)$, on a:

$$Inv(\{A,B\}) \supset \{Id_E, s_D\}.$$

où s_D = réflexion par rapport à la droite D.

- Si A et B ne sont pas fixes, alors il sont échangés entre eux et donc le point $\Omega = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ est fixe pour toute $f \in Inv(A,B)$ et on a:

$$Inv(\{A,B\}) \supset \{s_\Delta, R_{\Omega,\pi}\}$$

où s_Δ = réflexion par rapport à la droite Δ passant par Ω et orthogonale à D

et $R_{\Omega,\pi}$ = rotation de centre Ω et angle π.

On a donc que:

$$Inv(\{A,B\}) = \{Id_E, R_{\Omega,\pi}, s_\Delta, s_D\}$$

La table de multiplication de ce groupe est:

	Id_E	$R_{\Omega,\pi}$	S_D	S_Δ
Id_E	Id_E	$R_{\Omega,\pi}$	S_D	S_Δ
$R_{\Omega,\pi}$	$R_{\Omega,\pi}$	Id_E	S_Δ	S_D
S_D	S_D	S_Δ	Id_E	$R_{\Omega,\pi}$
S_Δ	S_Δ	S_D	$R_{\Omega,\pi}$	Id_E

il est abelien et isomorphe donc à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Un groupe muni de cette table de mult. est dit: groupe de Klein.

Exemple 2:

Déterminer le sous-groupe $\mathcal{J}$ de $Is(2)$ qui laisse invariant un triangle équilatère.

Les sommets (A, B, C) du triangle forment un repère affine, donc toute isométrie f est déterminée (comme applic. affine) par ses valeurs sur A, B et C. Or, pour que le triangle soit invariant il faut que $f(A), f(B), f(C) \in \{A, B, C\}$ et, puisque f est bijective, le triplet $(f(A), f(B), f(C))$ est une permutation de (A, B, C). Donc il y a au plus $3! = 6$ applications affines qui laissent invariant le triangle.

Soit $G = \frac{1}{3}(A+B+C)$. On a:

$$f(G) = \frac{1}{3}(f(A)+f(B)+f(C)) = \frac{1}{3}(A+B+C) = G$$

$\Rightarrow \forall f \in \mathcal{J} : f(G) = G$.

$\Rightarrow$ $\mathcal{J}$ est sous-groupe de $O_G(E)$.

Par conséquent il ne contient que:

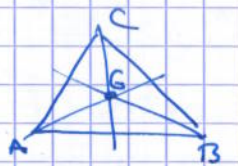
- l'identité
- les rotations autour de G
- les réflexions par rapport à une droite passant par G.

On a deux types de rotations autour G :

$$R_1 = R_{G,\frac{2}{3}\pi} = \begin{cases} A \longmapsto B \\ B \longmapsto C \\ C \longmapsto A \end{cases}$$

$$R_2 = R_{G,\frac{4}{3}\pi} = \begin{cases} A \longmapsto C \\ B \longmapsto A \\ C \longmapsto B \end{cases}$$

Vu que $\mathcal{J}$ peut avoir au plus 6 éléments et on en a déjà 3 (Id, R_1, R_2) on a au maximum 3 symétries par rapport à des droites passant par G. Il est evident que les symétries S_A, S_B, S_C par rapport aux médiatrices des côtés du triangle le laissent invariant et donc :



$$\mathcal{J} = \{Id, R_1, R_2, S_A, S_B, S_C\}$$

La table de mult. est :

	Id	R_1	R_2	S_A	S_B	S_C
Id	Id	R_1	R_2	S_A	S_B	S_C
R_1	R_1	R_2	Id	S_C	S_A	S_B
R_2	R_2	Id	R_1	S_B	S_C	S_A
S_A	S_A	S_B	S_C	Id	R_1	R_2
S_B	S_B	S_C	S_A	R_2	Id	R_1
S_C	S_C	S_A	S_B	R_1	R_2	Id

$\boxed{\text{non-commutativ}}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{J}$ est isomorphe à S_3 qui est isomorphe à D_3.

Le cas d'un polygone régulier convexe à n côtés dans le plan, avec $n \geq 3$ est similaire et on trouve $Inv \cong D_n$

Formes bilinéaires, formes quadratiques, coniques.

Rappel. Coniques algébriques dans l'espace affine

Déf: Soit E un esp. affine et $\vec{E}$ sa direction.

Soit $\vec{E}^*$ l'esp. dual de $\vec{E}$. $\vec{E}^* = \mathcal{L}(\vec{E}, \mathbb{R})$ est un esp. vectoriel.

Une application linéaire $\vec{f} : \vec{E} \to \vec{E}^*$, non identiquement 0, est dite polarité linéaire sur $\vec{E}$ si

$$< \vec{f}(x), y > = < \vec{f}(y), x > \quad \forall x, y \in \vec{E}$$

où $< x^*, y > \overset{\text{déf}}{=} x^*(y) \in \mathbb{R} \quad \forall x^* \in \vec{E}^* \; \forall y \in \vec{E}$

(dualité entre $\vec{E}$ et $\vec{E}^*$).

Il y a une bijection entre

$$\{\text{polarités linéaires}\} \xleftrightarrow{\text{bijection}} \left\{\begin{array}{l}\text{formes bilinéaires} \\ \text{symétriques}\end{array}\right\}$$

$$< \vec{f}(x), y > = b(x, y) \qquad b : \vec{E} \times \vec{E} \to \mathbb{R} \quad (\text{ou } \mathbb{K})$$

bilinéaire, symétrique.

On dit que b est la forme polaire de la forme quadratique q, où $q(x) = b(x, x)$.

Matrice associée.

Si $e = (e_i)$ est une base de $\vec{E}$, on a:

$$b(x, y) = b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \, b(e_i, e_j)$$

en posant $b(e_i, e_j) \overset{\text{déf}}{=} \alpha_{ij}$ on a:

$$b(x, y) = {}^t x M y \quad \text{où} \quad \boxed{M = (\alpha_{i,j})} \text{ est une matrice } n \times n$$

et représente b dans la base (e_i).

b étant symétrique, on a:

$${}^t x M y = {}^t y {}^t M x \implies \boxed{M = {}^t M}$$

$\text{dét}(M)$ = discriminant de b.

Changement de base

Si on a deux bases (e) et (e') de $\vec{E}$, M est la matrice de b dans la base (e) et M' est la matrice de b dans la base (e'), alors

$$M' = {}^tPMP$$

où P = matrice de changement de base de (e) à (e'). et donc $P \in GL_n(\mathbb{R})$.

On dit que M' est <u>congruente</u> à M.

Liens entre q et b:

Vu que $q(x) = b(x, x)$. On a:

$q(x+y, x+y) = b(x+y, x+y) = q(x) + q(y) + 2b(x,y)$.

Donc si $char(\mathbb{K}) \neq 2$:

$$b(x,y) = \frac{1}{2}\left[q(x+y) - q(x) - q(y)\right] \quad \text{forme polaire.}$$

Orthogonalité

<u>Déf</u>: $x, y \in \vec{E}$ sont <u>orthogonaux relativement à b</u> ssi:

$$b(x,y) = 0$$

- $A \subset E$ ensemble. $A^\perp \overset{déf}{=} \{x \in \vec{E} \mid b(x,y) = 0 \ \forall y \in A\}$.

Donné $a \in \vec{E}$, on a : $\varphi_a : \vec{E} \to \mathbb{R}$ $\quad \varphi_a(x) = b(a,x) = b(x,a)$

et donc $a^\perp = \ker \varphi_a$ est un ~~sous~~-esp. vect. de $\vec{E}$.

Plus en gén. on a pour $A \subset \vec{E}$, $A^\perp = \bigcap_{a \in A} \ker \varphi_a$ qui est donc sous-esp. vectoriel de $\vec{E}$.

<u>Déf</u>: On appelle <u>radical de b</u> : $E^\perp$.

b est dite non-dégénérée $\Leftrightarrow$ $E^\perp = \{0\}$.

On définit $\quad rg\, b \overset{déf}{=} \dim(E) - \dim(E^\perp)$.

<u>Prop</u>: $rg(b) = rg(M_e(b))$ où $M(b)$ est la matrice de b dans une base (e) de $\vec{E}$.

Corollaire :

b non-dégénérée $\iff$ $\det(M_e(b)) \neq 0$

où (e) est une base arbitraire.

Théorème :

Si b non-dégénérée et soit $F \subset E$ sous-esp. vect

Alors $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim E$.

Exemple. $\vec{E} = \mathbb{R}^2$ $\quad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad F = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x_1 = x_2$

$\Rightarrow F^\perp = F$.

Déf : Un point $x \in \vec{E}$ est isotrope si $q(x) = 0$ (i.e. $b(x,x) = 0$).

On a que $q(\lambda x) = b(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 b(x,x) = \lambda^2 q(x)$,

donc donné un point x isotrope on a en effet un cône isotrope pour q.

Déf : Soit b une forme bilinéaire symétrique et q la forme quadratique associée. Une base $(e) = (e_i)$ de $\vec{E}$ est q-orthogonale si $\forall i,j \; i \neq j \quad b(e_i, e_j) = 0$

et q-orthonormée si $b(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Théorème :

Soit $\vec{E}$ esp. vect. de dim. finie, q forme quadratique.

$\Rightarrow \exists$ base q-orthogonale.

Rmq : • Si $q(v) \neq 0 \Rightarrow \exists$ base q-orthogonale contenante v.

• La matrice associée à b dans une base orthogonale est diagonale.

Classification :

On dit que <u>deux formes quadratiques q et q' sont équivalentes</u>, $q \sim q'$ si $\exists\, u \in GL(\vec{E})$ t.q.

$$b'(x,y) = b(u(x), u(y)) \quad \forall x, y \in E$$

i.e. $\boxed{q' = q \circ u}$

Si $M = M_e(b)$ et $A = M_e(u)$ sont les matrices dans une base (e) on a alors :

$$M_e(b') = \boxed{{}^tA M A = M'}$$

Théorème de Sylvester

Soit $\vec{E}$ esp. vect. réel de dim $n < +\infty$. Soit b une forme bilinéaire symétrique.

Alors il existe une base orthogonale $\{e_1, .., e_n\}$ pour b t.q. $M_e(b) = \mathrm{Diag}(\underbrace{1, .., 1}_{p}, \underbrace{-1, .., -1}_{q}, 0, ..., 0)$

et donc $q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2$

De plus, si on note :

$$p = \#\{i \in \{1, .., n\} \mid b(e_i, e_i) > 0\}$$

$$q = \#\{i \in \{1, .., n\} \mid b(e_i, e_i) < 0\}$$

le <u>couple (p,q)</u> est indép. du choix de la base et est dite <u>signature de b</u>, et on a :

$$rg(b) = p + q.$$

Coniques.

Soit E plan affine et soit $\vec{E}$ sa direction.

Déf: On appelle <u>conique affine réelle</u> l'ensemble:

$$\mathcal{C} = \{ M \in E \mid q(\overrightarrow{PM}) + 2g(\overrightarrow{PM}) + c = 0 \}$$

où $q : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ forme quadratique

$g : \vec{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ forme linéaire

$c \in \mathbb{R}$ constant et P est un point de E arbitraire.

Rmq: la forme n'est plus homogène.

Équation, $\boxed{n=2}$: On prends un repère affine d'origine P:

$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

S = matrice de $q = (b_{ij})$ (symétrique, donc $b_{12} = b_{21}$)

g sera un vecteur et ${}^t g = b_{13} \; b_{23}$

$c = b_{33}$

Alors:

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| (x \; y) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 (b_{13} \; b_{23}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b_{33} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| b_{11} x^2 + 2 b_{12} xy + b_{22} y^2 + 2 b_{13} x + 2 b_{23} y + b_{33} = 0 \right\}$$

forme quadratique non-homogène.

Rmq: $$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| (x \; y \; 1) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Lemme: Les données q, g, c et P ne sont pas uniques.

Dém:

Soit $P' \in E$. Alors:

$$q(\overrightarrow{PM}) + 2g(\overrightarrow{PM}) + c = 0 \iff q(\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'M}) + 2g(\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'M}) + c = 0$$

$$\iff q(\overrightarrow{P'M}) + 2g(\overrightarrow{P'M}) + 2\underbrace{b(\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{P'M})}_{\text{polaire de } q}$$

$$+ q(\overrightarrow{PP'}) + 2g(\overrightarrow{PP'}) + c = 0$$

D'où $q' = kq$ $\quad k$ = scalaire $\in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$g' = kg + k\, b(\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{P'M})$

On suppose E esp. affine euclidien.

Comme corollaire du théorème sur l'existence d'une base orthogonale commune pour une forme homogène on trouve que:

On peut diagonaliser q dans une b.o.n. de $(\vec{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ avec origine = centre de la conique si la conique a un centre.

Où: Déf: Soient E plan affine réel, $\mathcal{C}$ conique de E et $A \in E$. A est le centre de $\mathcal{C}$ si, lorsque on écrit $\mathcal{C} = \{M \in E \mid q(\vec{AM}) + 2g(\vec{AM}) + c = 0\}$ on a: $g(\vec{AM}) = 0$.

Si $\mathcal{C}$ a un centre, alors on peut trouver une b.o. de $(\vec{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ t.q. l'équation de $\mathcal{C}$ soit:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{ellipse}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{hyperbole}$$

où on a choisi l'origine = centre de $\mathcal{C}$.

De plus, en utilisant la transformation affine

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{a} x \\ \frac{1}{b} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

on arrive à:

$(x')^2 + (y')^2 = 1$ (cercle)

ou $(x')^2 - (y')^2 = 1$ (hyperbole équilatère).

Lemme: Soient E plan affine euclidien, $\mathcal{C}$ conique de E représentée par $\{q(\vec{PM}) + 2g(\vec{PM}) + c = 0\}$. Alors:

$\mathcal{C}$ possède un centre $\iff$ q est non dégénérée.

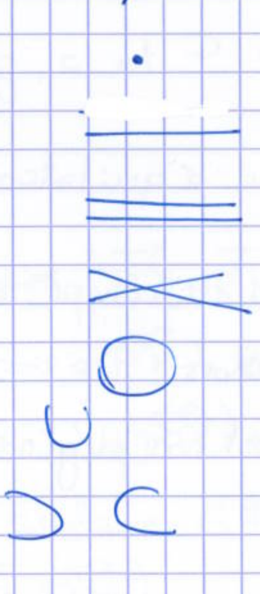
Théorème de Classification des coniques affines.

Soit E plan affine euclidien. Soit $\mathcal{C}$ conique affine déf. par $q(\overrightarrow{PM})+2g(\overrightarrow{PM})+c=0$, où q est la forme quadratique de E. Alors :

1. Si q est non-dégénérée, alors $\mathcal{C}$ a un centre O et on a : que q est de signature $(2,0)$, $(0,2)$ ou $(1,1)$.
   (a) Si la signature de q est $(2,0)$ ou $(2,0)$ et si $\mathcal{C} \neq \emptyset$ ou $c \neq 0$ alors la conique est une <u>ellipse</u>
   (b) Si la signature de q est $(1,1)$ la conique est :
   - une <u>hyperbole</u> si $c \neq 0$
   - la <u>réunion de deux droites</u> si $c = 0$.
2. Si q est dégénérée, on a les cas suivantes :
   (a) $\mathcal{C} = \emptyset$
   (b) La forme linéaire est nulle $\Rightarrow$ on a <u>une droite</u> ou <u>deux droites parallèles</u>
   (c) La forme linéaire n'est pas nulle $\Rightarrow$ la conique est une <u>parabole</u>.

<u>Corollaire</u> : Les orbites du groupe affine dans l'ensemble des coniques affines réelles sont :

(1) $x^2+y^2+1=0$: $\emptyset$ ensemble vide
(2) $x^2+y^2=0$: point
(3) $x^2=0$: droite
(4) $x^2-1=0$: deux droites parallèles
(5) $x^2-y^2=0$: deux droites incidentes
(6) $x^2+y^2-1=0$: ellipse
(7) $x^2-y=0$: parabole
(8) $x^2-y^2-1=0$: hyperbole.



Théorème de l'axe principal

Soit E plan affine réel euclidien.

Soit $\mathcal{C}$ une conique à centre de E t.q.

$\mathcal{C} = \{ M \in E \mid q(\overrightarrow{PM}) + 2g(\overrightarrow{PM}) + c = 0 \}$.

Soit q la forme quadratique associée à $\mathcal{C}$ et b sa forme bilinéaire symetrique associée.

Alors, les axes de symétrie de $\mathcal{C}$ sont dirigés par les droites propres de u, qui est l'unique endomorphisme auto-adjoint associé à b tel que $b(\vec{v}, \vec{w}) = \langle u(\vec{v}), \vec{w} \rangle$

Définition de conique par propriétés géométriques

Déf: Soit E esp. affine euclidien de dimension 2.
Soient F un point de E, D une droite de E t.q. $F \notin D$ et $e \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle conique l'ensemble:

$$\mathcal{C} = \left\{ M \in E \;\middle|\; \frac{d(M,F)}{d(M,D)} = e \right\}$$

Dans un repère affine où $F = \binom{0}{0}$ et $D = \{x = \alpha\}$ on trouve l'équation:

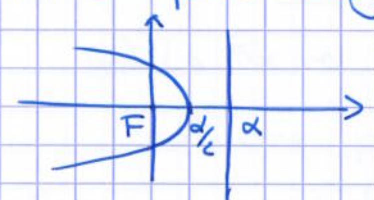
$$(1-e^2)x^2 + y^2 + 2e^2\alpha x - e^2\alpha^2 = 0$$

Donc: Si $1-e^2 > 0$ c'est une ellipse (i.e., $e<1$)
Si $1-e^2 = 0$ c'est une parabole (i.e., $e=1$)
Si $1-e^2 > 0$ c'est une hyperbole (i.e., $e > 1$).

(1) Parabole: $\boxed{e=1}$

$$y^2 + 2\alpha x - \alpha^2 = 0$$

$\alpha \neq 0$ pas dégénérée $\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right) =$ sommet



(2) Conique à centre: $\boxed{e \neq 1}$

(a) $\mathcal{C} \cap \{y=0\}$ $\quad x_1 = \dfrac{e\alpha}{e-1} \quad x_2 = \dfrac{e\alpha}{1+e}$
"sommets de la conique".

(b) Le centre de la conique sera $\Omega = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, 0\right)$
$$= \left(\frac{e^2\alpha}{e^2-1}, 0\right)$$

(c) $\boxed{e^2<1}$ ellipse: on peut changer les coordonnées pour avoir le centre dans l'origine et on arrive à:

$$\frac{(1-e^2)^2}{\alpha^2 e^2} X^2 + \frac{1-e^2}{\alpha^2 e^2} Y^2 = 1$$

i.e. $$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

(d) <u>hyperbole</u> : en bougeant Ω à l'origine, on arrive à

$$\frac{(1-e^2)^2}{\alpha^2 e^2} \cdot X^2 - \frac{e^2-1}{\alpha^2 e^2} Y^2 = 1$$

i.e. $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1.$

<u>Déf bifocale</u> : On prend $F, F' \in E$ distincts et $a>0$

$\mathcal{C} = \{M \in E \mid |\overrightarrow{MF}| + |\overrightarrow{MF'}| = 2a\}$

$= \{M \in E \mid d(M,F) + d(M,F') = 2a\}$

est une <u>ellipse</u> de <u>foyers F et F'</u> et <u>eccentricité</u>

$e = \frac{d(F,F')}{2a}$.

Pour avoir une hyperbole il faut prendre la différence...