J. Raissy

Analyse Complexe - L2 Spécial

Corrigé du Contrôle Continu du 5 mars 2013

Exo 1 :

1. On a $a_n = 2^n \quad \forall n \geq 0$ et

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = \limsup_{n\to\infty} 2 = 2 \in]0,+\infty[$$

Donc d'Après Hadamard, le rayon de convergence est $\frac{1}{2}$.

2. On a $a_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad \forall n \geq 0$ et :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{((n+1)!)^3}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{(n!)^3} = \frac{(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{(n+1)^2}{3(3n+1)(3n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{27n^2+27n+6}$$

Donc :

$$\limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2n+1}{27n^2+27n+6}\right) = \frac{1}{27}$$

et d'après d'Alembert, le rayon de convergence est 27.

3. On sait que $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{r}$ et que

$b_n = n^2 a_n \quad \forall n \geq 1$.

Donc $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

En plus, $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$. Donc

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{r}$$

et d'après d'Alembert on a que la série $\sum_{n\geq 1} n^2 a_n z^n$ a rayon de convergence $r' = r > 0$.

□

Exo 2 :

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $h \in \mathbb{C}^*$ on a :

$$\frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \frac{h^2 + 2hz}{h} = h + 2z$$

Donc $\lim\limits_{|h| \to 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = 2z$ $\quad \forall z \in \mathbb{C}$, d'où la fonction $z \mapsto z^2$ est holomorphe pour tout $z \in \mathbb{C}$.

- La fonction $z \mapsto \frac{1}{z^2}$ est définie pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, et elle est holomorphe $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ car composition de deux fonctions holomorphes dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\left(\begin{array}{l} z \mapsto z^2 \text{ et} \\ w \mapsto \frac{1}{w} \end{array} \right)$.

Exo 3 :

1. $P(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ est $\mathbb{R}$-différentiable.

On cherche $Q(x,y)$ $\mathbb{R}$-différentiable et telle que :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$ (← conditions de Cauchy)

(i) $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow Q(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} + \varphi(x)$

avec $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction inconnue.

(ii) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$; mais $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2} + \varphi(x) \right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(x)$

donc $\varphi'(x) \equiv 0 \Rightarrow \varphi(x) \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$.

Alors toutes les fonctions holomorphes avec $\mathrm{Re}(f) = \frac{x}{x^2+y^2}$ sont :

$$f(z) = \frac{x - iy}{x^2+y^2} + ic = \frac{1}{z} + ic \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

2. $P(x,y) = x^2 - y^2$ est $\mathbb{R}$-différentiable.

On cherche $Q(x,y)$ $\mathbb{R}$-différentiable et telle que :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

(i) $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 2x = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \Rightarrow Q(x,y) = 2xy + \varphi(x)$

avec $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction inconnue

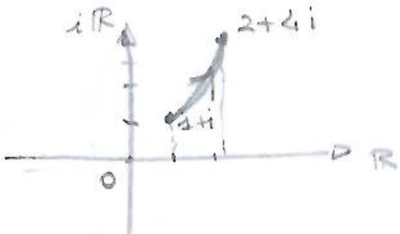
(ii) $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -2y = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, mais $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(2xy + \varphi(x)\right) = 2y + \varphi'(x)$

donc $\varphi'(x) \equiv 0 \Rightarrow \varphi(x) \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$.

Alors toutes fonctions holomorphes avec $\mathrm{Re}(f) = x^2 - y^2$ sont :

$f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy + ic = z^2 + ic$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Exo 4 :



Le chemin joignant le point $1+i$ à $2+4i$ le long de la parabole $y = x^2$ est paramétré par :

$\gamma : [1,2] \to \mathbb{C}$

$\gamma(t) = t + it^2$

$$\begin{cases} \gamma(1) = 1+i \\ \gamma(2) = 2+4i \end{cases}$$

La fonction $z \mapsto \bar{z}$ est continue sur le support $\gamma([1,2])$ et on a :

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz = \int_1^2 \overline{\gamma(t)} \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_1^2 (t - it^2)\cdot(1 + 2it)\, dt$$

$$= \int_1^2 (t + 2it^2 - it^2 + 2t^3)\, dt$$

$$= \int_1^2 (t + 2t^3)\, dt + i \int_1^2 t^2\, dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} + \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}_{2}} t^4\right]_1^2 + i\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(4 + 16 - 2) + i\left(\frac{8-1}{3}\right)$$

$$= 9 + \frac{7}{3} i$$

Exo optionnel :

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ domaine (c'est-à-dire : ouvert et connexe) et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe dans Ω.

Si f est constante, alors $f(z) \equiv \omega \in \mathbb{C}$ et $Re(f) \equiv Re(\omega)$ $Im(f) \equiv Im(\omega)$, donc la partie réelle et la partie immaginaire de f sont constantes.

Si $Re(f(z))$ est constante, alors grâce à les conditions de Cauchy on deduit que la partie immaginaire de f est constante aussi. En fait :

Si on pose $f(z) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$ [càd $P = Re(f)$, $Q = Im(f)$].

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ holomorphe} \\ \text{dans } \Omega \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} P,\ Q\ \ \mathbb{R}\text{-differentiables} \\ \underline{\text{et}} \\ \dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{array}\right\}.$$

Si $P \equiv c \in \mathbb{C}$, $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv 0 \Rightarrow$ le fait que f soit holomorphe nous donne $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial y} \equiv 0$ aussi $\Rightarrow Q \equiv$ constante.

Si $Im(f(z))$ est constante, avec le même raisonnement, on deduit que $Re(f(z))$ doit être constante aussi.

Si $Re(f(z))$ et $Im(f(z))$ sont constantes, alors f est constante.