Université PAUL SABATIER 2012-2013

L2 Préparation aux Concours - feuille de TD n^{o}2

I) Solutions développables en série entière

Exercice 1
Trouver une solution DSE en 0 des équations différentielles. On précisera l'intervalle de validité de la solution.

a) $2xy'(x) + y(x) = \dfrac{1}{1-x}$

b) $xy''(x) - y(x) = 1$

c) $x^2y''(x) - 6xy'(x) + (12 + x^2)y(x) = 0$

d) $2x^2y''(x) - 3xy'(x) - 3y(x) = 1 + x^2$

e) $2x^2y''(x) - 3xy'(x) - 3y(x) = 1 + x^3$

Exercice 2
Soit : $\sum \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$
a) Déterminer son rayon de convergence. Soit f sa somme.
b) Ecrire f' et f'' comme somme de séries entières. En déduire la valeur de $f(x) + f'(x) + f''(x)$ à l'aide d'une fonction élémentaire.
c) Résoudre l'équation différentielle $y''(x) + y'(x) + y(x) = e^x$ et en déduire la valeur de f (on utilisera par exemple la valeur de $f(0)$ et $f'(0)$).

Exercice 3

Résoudre sur $]0, 1[$ l'équation

$$x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 1$$

a) Rechercher une solution développable en série entière au voisinage de 0.

b) Trouver une deuxième solution de l'équation homogène.

c) Décrire l'ensemble des solutions de l'équation sur $]0, 1[$.

Exercice 4

Soit l'équation différentielle

$$E : xy'' + 3y' - 4x^3y = 0$$

a) Chercher une solution non nulle y_1 développable en série entière au voisinage de 0. Préciser le rayon de convergence puis exprimer $y_1(x)$ à l'aide des fonctions usuelles, pour $x \in]0, +\infty[$.

b) Trouver une solution y_2 de E sur $]0, +\infty[$ non colinéaire à y_1.

c) Décrire l'ensemble des solutions de E sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5

a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(1+t^2)y''(t) + 4t\,y'(t) + 2y(t) = 0$$

en recherchant les séries entières solutions.

b) Résoudre ensuite

$$(1+t^2)y''(t) + 4t\,y'(t) + 2y(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

II) Systèmes différentiels à coefficients constants

Exercice 1

Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ avec

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et pour la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$

Exercice 2

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x_1'(t) & = 2x_2(t) + \dfrac{e^t}{1+e^{-t}} \\ x_2'(t) & = -x_1(t) + 3x_2(t) + \dfrac{2e^t}{1+e^{-t}} \end{cases}$$

Exercice 3

Résoudre :

$$\begin{cases} x'(t) & = & x(t) + y(t) \\ y'(t) & = & -x(t) + y(t) \end{cases}$$

Exercice 4

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = x_1(t) + x_3(t) \end{cases}$$

Exercice 5

Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel

$$\begin{cases} x_1'(t) = \cos(t)\,x_1(t) + \sin(t)\,x_2(t) \\ x_2'(t) = -\sin(t)\,x_1(t) + \cos(t)\,x_2(t) \end{cases}$$

Exercice 6* Soit A une matrice $n \times n$ diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. A quelle condition le système

$$\frac{dY}{dt} = AY$$

n'admet il que des solutions bornées pour $t \in [0, +\infty[$? Même question pour $t \in \mathbb{R}$. A quelle autre condition n'admet il que des solutions periodiques ?