L2 Préparation aux Concours - Feuille de TD n°1

Équations différentielles linéaires

I. –ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE 1

EXERCICE 1

(a) Rechercher les solutions sur $\mathbb{R}$ des EDO sous forme résolue suivantes:

$$\begin{array}{ll} (E_1) & y'(x) - 4y(x) = (x+1)e^{ax} \text{ pour a réel} \\ (E_2) & (1+x^2)y'(x) + xy(x) = 2x^2 + 1 \\ (E_3) & 2y'(x) - y(x) = \dfrac{1}{1+e^x} \end{array}$$

(b) Chercher les solutions de (E_2) qui vérifient $y(0) = 1$.

EXERCICE 2

Déterminer sur quels intervalles les EDO suivantes peuvent être mises sous forme résolue. Sur chaque intervalle calculer explicitement les solutions. Étudier ensuite l'existence éventuelle de prolongements dérivables de ces solutions. Donner la dimension et une base de l'espace vectoriel des solutions résultant de cette étude.

$$\begin{array}{ll} (E_4) & xy'(x) - (x+2)y(x) = 0 \\ (E_5) & x(x-1)y'(x) + (1+x)y(x) = 0 \end{array}$$

EXERCICE 3

Déterminer sur quels intervalles les EDO suivantes peuvent être mises sous forme résolue. Sur chaque intervalle calculer explicitement les solutions. Étudier ensuite l'existence éventuelle de prolongements dérivables de ces solutions.

$$\begin{array}{ll} (E_6) & x(x-1)\ln(x)y'(x) - (2x\ln(x) - x + 1)y(x) = x \\ (E_7) & \sqrt{|x|}\, y'(x) - y(x) = 1 \\ (E_8) & x(x^2-1)y'(x) + 2y(x) = x^2 \\ (E_9) & x(x-1)^2y'(x) + (x^2-1)y(x) = 1 + x \end{array}$$

* EXERCICE 4

1- Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui tend vers 0 quand $x \to +\infty$ et soit l'équation différentielle (E) $y' + y = g$.

   a- Donner l'expression de la solution générale de cette équation différentielle (la solution particulière sera exprimée à l'aide d'une intégrale).

   b- Montrer que toute solution de (E) tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

2- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, de classe C^1. On suppose que $f' + f \to 0$ quand $x \to +\infty$. Montrer que $f \to 0$ quand $x \to +\infty$.

* EXERCICE 5

Lemme de Gronwall : soient f et φ deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives, et soit c une constante positive. On suppose que l'on a l'inégalité

$$\forall t \in [a,b], \quad f(t) \leq c + \int_a^t \varphi(s)f(s)ds.$$

Montrer que

$$\forall t \in [a,b], \quad f(t) \leq c\exp\left(\int_a^t \varphi(s)ds\right).$$

II. – ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE 2

II.A – Équations différentielles à COEFFICIENTS CONSTANTS

(a) Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes en précisant si nécessaire les intervalles de définition de ces solutions:

$$\begin{array}{ll}
(E_{10}) & y''(x) + y(x) = e^x, \\
(E_{11}) & y''(x) + 3y'(x) = e^x - x + 1 + 5\sin x, \\
(E_{12}) & y'' - 4y'(x) + 4y(x) = (2x+1)e^{\lambda x} \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R} \\
(E_{13}) & y''(x) + y'(x) + y(x) = e^{-2x}\sin x \\
(E_{14}) & y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+x^2} \\
(E_{15}) & y''(x) + y(x) = \dfrac{1}{\cos x}.
\end{array}$$

(b) Déterminer les solutions de (E_{10}) qui vérifient respectivement
(i) $y(0) = 1,\ y'(0) = v_0$ où $v_0 \in \mathbb{R}$.
(ii) $y(0) = 1,\ y(2\pi) = a$ où $a \in \mathbb{R}$

II.B – Équations différentielles à COEFFICIENTS non CONSTANTS

EXERCICE 1
On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E_{16}) \qquad x(x^2+1)y''(x) - 2(x^2+1)y'(x) + 2xy(x) = 0.$$

a) Rechercher une solution polynomiale (de degré 2) de (E_{16}).

b) En déduire l'ensemble des solutions de (E_{16}) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

c) Les solutions obtenues admettent-elles des prolongements dérivables sur $\mathbb{R}$? Sont-ils deux fois dérivables? Si oui, quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions ?

EXERCICE 2
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$(E_{17}) \qquad (t^2+1)^2y''(t) - 2t(t^2+1)y'(t) + 2(t^2-1)y(t) = (1+t^2).$$

a) Rechercher une solution polynomiale de degré 2 de l'équation sous forme homogène.

b) Trouver une deuxième solution de l'equation homogène.

c) Trouver une solution particulière.

d) Décrire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation.

EXERCICE 3– ÉQUATIONS d'EULER: DEUX APPROCHES.
a) On cherche les solutions réelles sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E_{18}) \qquad x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^4\cos x - 1$$

Rechercher les solutions de l'équation homogène correspondante en les posant sous la forme x^α, où $\alpha \in \mathbb{R}^*$. En déduire les solutions de (E_{18}).

b) On cherche les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E_{19}) \qquad x^2y''(x) - 2xy'(x) + 3y(x) = 0.$$

Pour cela on effectue le changement de variable $t = \ln x$ et on posera $z(t) = y(x)$.

EXERCICE 4 Résoudre sur $\mathbb{R}_+^\star$ l'équation différentielle suivante :

$$(E_{20}) \qquad t^3y''(t) + ty'(t) - y(t) = 0.$$

*** EXERCICE 5**
Déterminer l'ensemble des fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ qui sont deux fois dérivables et qui vérifient : $\forall t \in]0, +\infty[, \quad f'(t) = f(\frac{1}{t})$.