UNIVERSITE PAUL SABATIER 2012–2013

Groupes et Géométrie - L2 Mathématiques

CONTRÔLE TERMINAL DU **15** MAI 2013, DURÉE **2** H

Exercice I

On consider le groupe symétrique S_7 et ses éléments

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

a. Décomposer g et h en cycles a support disjoint.

b. Décomposer g et h en transpositions.

c. Calculer la signature de g et de h.

d. Est-ce que g et h sont conjugués dans S_7 ?

e. Est-ce qu'il existe un élément d'ordre 12 dans S_7 ? Est-ce qu'il existe un élément d'ordre 4 dans S_7 ?

Exercice II

On se place dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du repère canonique. Soit Δ le rectangle de sommets $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (1,0)$, $A_3 = (1,2)$, $A_4 = (0,2)$ dans le repère canonique.

a. Existe-t-il une application affine f telle que $f(A_1) = A_1$, $f(A_2) = A_2$, $f(A_3) = A_4$, $f(A_4) = A_3$?

b. Existe-t-il une application affine g telle que $g(A_i) = A_{i+1}$ pour $i = 1,2,3$ et $g(A_4) = A_1$?

c. g est elle une isométrie ?

d. Calculer $g(B)$ pour $B = (1/2, 1)$ dans le repère canonique.

Exercice III

a. Déterminer le sous-groupe de $\mathrm{Is}(2)$ qui laisse invariant un triangle isocèle.

b. Montrer que trois points A, B, C différents dans $\mathbb{R}^3$ déxterminent un unique plan affine $\mathcal{P}$ qui les contient.

c. Montrer que un sous-groupe de $\mathrm{Is}(3)$ qui laisse $\{A, B, C\}$ invariant, laisse le plan $\mathcal{P}$ invariant aussi.

d. Donner (sans preuve) la classification des éléments dans $\mathrm{Is}(3)$.

e. Déterminer le sous-groupe de $\mathrm{Is}(3)$ qui laisse invariant un triangle isocèle (en utilisant les réponses aux points précedents).

Exercice IV

a. Déterminer si la forme

$$b(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2 - x_2 - y_2$$

est bilinéaire, symétrique, définie, positive. Est-que $q(x) := b(x,x) = 3$ représente une conique ? Si oui, déterminer le type de conique, et si elle a un centre.

b. Dans un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, on considère le cône $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = z^2$. Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}$ avec :

1. le plan d'équation $y + x = 1$;
2. le plan d'équation $y + z = 1$;
3. le plan d'équation $y + 2z = 1$;
4. le plan d'équation $x + y + z = 1$.