# UNIVERSITE PAUL SABATIER 2012–2013

**Analyse Complexe - L2 Spécial**

CONTRÔLE TERMINAL DU 15 MAI 2013, DURÉE 2 H

### Exercice I

1. Calculer $\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}\,dz$ le long de la courbe $\gamma$ joignant le point $1$ au point $3$ en ligne droite, et calculer $\int_\Gamma \frac{1}{1+z^2}\,dz$ le long du demi-cercle $\Gamma = C(2,1) \cap \{\mathrm{Im(z)} \geq 0\}$ de centre 2 et rayon 1 inclus dans le demi-plan supérieur et parcouru dans le sens trigonométrique.
2. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{C}$ avec $|a| = |b| = 1$ on a
$$\int_{C(0,r)} \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = 0,$$
pour tout $r > 0$ tel que $r \neq 1$ (où le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique).
3. Montrer que $\int_{C(0,2)} \frac{dz}{1+z^2} = 0$ (où le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique).

### Exercice II

1. Déterminer les singularités isolées de la fonction $f(z) = \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2-4)}$ ainsi que leur nature, et calculer le résidu de $f$ en chacun de ces points.
2. Déterminer les singularités isolées de la fonction $g(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)}$ ainsi que leur nature, et déterminer la série de Laurent de $g(z)$ dans les couronnes suivantes :
   (a) $|z+1| > 3$,
   (b) $0 < |z-2| < 3$.

### Exercice III

Soit $a \in \mathbb{R}$, tel que $a > 1$.

1. Déterminer les zéros de la fonction $f(z) = az^2 - (1+a^2)z + a$.
2. Déterminer les singularités isolées de la fonction $f(z) = \frac{1}{az^2-(1+a^2)z+a}$ ainsi que leur nature, et calculer le résidu de $f$ en chacun de ces points.
3. Calculer l'intégrale $\int_{C(0,1)} \frac{1}{az^2-(1+a^2)z+a}\,dz$, où le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique.
4. Calculer enfin $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2a\cos(t)-(1+a^2)}$.

### Exercice IV

Démontrer le **Théorème du module minimum** :
Soit $f$ une fonction holomorphe dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. Si $|f|$ admet un minimum relatif en un point $a \in \Omega$, alors $f$ est constante dans $\Omega$.

### Exercice V

Soit $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans un voisinage $U$ de l'origine telle que $f(0) = 0$ et $f(z) = z + f(z^2)$ pour tout $z \in U$. On note avec $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ le développement en série entière (centrée en 0) de $f$ dans $U$.

1. Démontrer que $a_{2m+1} = 0$ pour tout $m \geq 1$.
2. Démontrer que $f(z) = \sum_{n=0}^\infty z^{2^n}$.