UNIVERSITE PAUL SABATIER 2012–2013

Analyse Complexe - L2 Spécial

CONTRÔLE CONTINU DU 5 MARS 2013, DURÉE 2 H

Exercice I

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} 2^n z^n$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{(n!)^3}{(3n)!} z^n$.
3. Soit $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$ un série entière de rayon de convergence $r > 0$. Déterminer le rayon de convergence r' de la série $\sum_{n\geq 1} n^2 a_n z^n$.

Exercice II

En quels points la fonction $z \mapsto z^2$ est-elle définie et dérivable au sens complexe ? Même question pour $z \mapsto \dfrac{1}{z^2}$.

Exercice III

Le plan complexe $\mathbb{C}$ est identifié à $\mathbb{R}^2$ par $z = x + iy$.

1. Trouver toutes les fonctions holomorphes $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ telles que $\mathrm{Re}\,(f(z)) = \frac{x}{x^2+y^2}$.
2. Trouver toutes les fonctions holomorphes $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que $\mathrm{Re}\,(g(z)) = x^2 - y^2$.

Dans les deux cas on cherchera à obtenir une expression simple en fonction de la variable complexe z.

Exercice IV

Calculer l'intégrale $\int_\gamma \overline{z}\, dz$, où γ est le chemin joignant le point $(1, 1)$ au point $(2, 4)$ le long de la parabole d'équation $y = x^2$, c'est-à-dire $\gamma\colon [1, 2] \to \mathbb{C}$ avec $\gamma(t) = t + it^2$.

Exercice optionnel

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine (ouvert connexe) et soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans Ω. Montrer que :

$$f \text{ est constante} \iff \mathrm{Re}\,(f(z)) \text{ est constante} \iff \mathrm{Im}\,(f(z)) \text{ est constante.}$$