Université Paul Sabatier II sémestre 2012-2013
L2 Spécial, Analyse Complexe

TD 4. Singularités, résidus

Exercice 1. Déterminer les singularités des fonctions suivantes, leur nature et les résidus correspondants :

a) $\frac{\sin z}{z^3-\pi^2 z}$, **b**) $\frac{z}{\sin z}$, **c**) $\exp\left(\frac{1}{z^4}\right)$, **d**) $z\cos\frac{1}{z}$, **e**) $\frac{1}{z(e^z-1)}$,

f) $\text{cotan} z - \frac{1}{z}$, **g**) $\frac{\exp\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1}$, **h**) $\pi\,\text{cotan}(\pi z)$, **i**) $\frac{1}{\sin(z^2)}$.

Exercice 2. Soit U un ouvert connexe. Même question que ci-dessus avec :

(1) $\dfrac{f'}{f}$, lorsque f est une fonction holomorphe sur U.
(2) $\dfrac{g}{h}$, lorsque g et h sont deux fonctions holomorphes sur U et que h a un pôle simple.
(3) $\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^n}$, lorsque f est une fonction holomorphe sur U, $z_o \in U$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. Déterminer la série de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ dans les couronnes suivantes:

(1) $0 < |z| < 1$,
(2) $1 < |z| < 2$.

Exercice 4. Calculer les résidus de

(1) $\frac{e^z}{\sin^2 z}$ $(z = k\pi)$,
(2) $\frac{\cos z}{z^3 \sin z}$ $(z = 0)$,

Exercice 5. Décomposer en série de Laurent dans les diverses couronnes admissibles de centre indiqué, les fonctions suivantes:

(1) $\frac{z-\sin z}{z^3}$ $(z = 0)$,
(2) $\frac{z}{(z-1)(z-2)}$ $(z = 1,\ z = 2)$,
(3) $\frac{z}{z^2+1}$ $(z = i)$,
(4) $\frac{e^z}{(z-1)^3}$ $(z = 1)$,
(5) $\frac{1}{z+a}$, $(z = 0)$
(6) $\frac{2z}{z^2+2z+1}$ $(z = 0)$.

Exercice 6. Trouver le résidu de $f \circ \varphi$ au point 0, si φ est holomorphe au voisinage de 0, avec $\varphi'(0) \neq 0$ et si f a un un pôle simple au point $\varphi(0)$ avec le résidu R.

Exercice 7. Soit γ le cercle unité parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Calculer :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{e^z - e^{-z}}{z^4}\,dz.$$

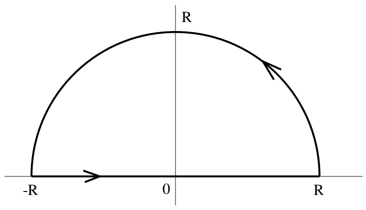
Exercice 8. On note γ le cercle de centre 0 et de rayon $3/2$ parcouru une fois dans le sens trigonométrique, calculer :

$$\int_\gamma \frac{5z^2+1}{z(z-1)}\,dz \quad \text{et} \quad \int_\gamma \frac{z}{(z-1)^2(z+2)}\,dz.$$

Exercice 9. Pour $r \neq 1$, on note γ_r le cercle de centre 0 et de rayon r parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Calculer :

$$\int_{\gamma_r} \frac{e^{1/z}}{z-1}\,dz.$$

Exercice 10. Considérons le contour suivant ($R \in \mathbb{R}^{+*}$) :



a) On fixe $a \in \mathbb{R}^+$. Calculer l'intégrale de

$$z \longmapsto \frac{e^{iaz}}{1+z^2}$$

sur ce circuit. En faisant tendre R vers $+\infty$, déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,dx.$$

b) En intégrant $ze^{iz}/(1+z^2)$ sur le même contour, calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}\,dx.$$

Exercice 11 ($*$)**.** Soit φ une application holomorphe du disque pointé $0 < |z| < 1$ dans la couronne $1 < |z| < 2$.

(1) Démontrer que φ se prolonge en une application holomorphe du disque $|z| < 1$ dans $\mathbb{C}$.
(2) Démontrer que φ ne peut être un isomorphisme du disque pointé $0 < |z| < 1$ sur la couronne $1 < |z| < 2$.

Exercice 12 ($*$)**.** Montrer que si φ est une fonction holomorphe près de a et $\varphi(a) \neq 0$, alors pour connaître les p premiers termes du développement en série en a de $\frac{1}{\varphi}$ il suffit de connaître les p premiers termes du développement en série en a de φ.