

### TD 3. Intégrales curvilignes, Formule de Cauchy

**Exercice 1.** Calculer l'intégrale des fonctions  $f(z) = z^2$ ,  $g(z) = \frac{1}{z}$  et  $h(z) = \cos z$  sur le chemin (orienté dans le sens trigonométrique)

$$\Gamma = [\pi/2, \pi/2 + i] \cup [\pi/2 + i, -\pi/2 + i] \cup [-\pi/2 + i, -\pi/2].$$

**Exercice 2.** Calculer l'intégrale de  $(\sin z)^2$  le long du chemin  $\gamma(t) = t + it^2$ ,  $t \in [0, 1]$ .

**Exercice 3.** Calculer les intégrales curvilignes de  $(\sin z)^2$  le long des courbes suivantes:  $\{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$ ,  $\{|z| = 1, \operatorname{Re} z \leq 0\}$ ,  $\{|z| \leq 1, \operatorname{Re} z = 0\}$ .

**Exercice 4.** Calculer les intégrales curvilignes de  $z - \frac{1}{z}$  le long des trois courbes joignant les points  $1 - i$  et  $1 + i$  en ligne droite ou au long du cercle centré en 0. Comparer les résultats et donner une explication.

**Exercice 5.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ . On pose  $\gamma(t) = a \cos(t) + ib \sin(t)$  pour  $t \in [0, 2\pi]$ . Calculer :

$$I = \int_{\gamma} \frac{dz}{z} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)}.$$

Montrer donc l'égalité suivante

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2(t) + b^2 \sin^2(t)} = 2\pi/ab.$$

**Exercice 6.** Soient  $I = [0, 1]$ ,  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $C^1$  et  $f: \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$  une application continue. Si  $t \in I$ , on pose  $\chi(t) = \overline{\gamma(t)}$ .

(1) Établir :

$$\overline{\int_{\gamma} f(z) dz} = \int_{\chi} \overline{f(\bar{z})} dz.$$

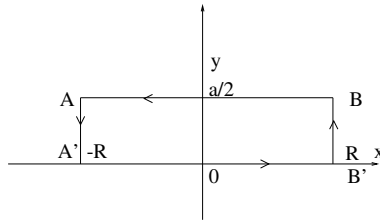
(2) On suppose que  $\gamma(t) = e^{2i\pi t}$ . Montrer que:

$$\overline{\int_{\gamma} f(z) dz} = - \int_{\gamma} \overline{f(z)} \frac{dz}{z^2}.$$

**Exercice 7 (\*).** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $\int_{\gamma} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \frac{dz}{z}$  pour  $\gamma = \mathbf{S}^1$ . En déduire la valeur des "intégrales de Wallis"  $\int_0^{2\pi} \cos^n(t) dt$ .

**Exercice 8 (\*).** Calculer  $\int_{\gamma} (z - a)^n dz$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , où  $\gamma(t) = a + \exp(it)$  et  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

**Exercice 9.** Appliquer le théorème de Cauchy à la fonction  $z \mapsto e^{-z^2}$  et au contour rectangulaire ci-après ( $a$  est un réel strictement positif).



Montrer que  $\int_{AA'} e^{-z^2} dz$  et  $\int_{BB'} e^{-z^2} dz$  tendent vers 0 quand  $R$  tend vers  $+\infty$ , et en déduire la valeur de

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos ax dx.$$

(On admettra que  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ).

**Exercice 10.** Soient  $D = B(0, 1)$ ,  $r \in ]0, 1[$ ,  $M \in \mathbb{R}_+$  et  $f \in O(D)$ . On suppose que  $f(0) = a_0 \neq 0$ , qu'il existe  $z_0 \in B(0, r)$  tel que  $f(z_0) = 0$ , et que  $|f(z)| \leq M$  si  $|z| = r$ . Montrer, à l'aide de la formule de Cauchy, que  $|a_0|r \leq |z_0|(M + |a_0|)$ .

**Exercice 11.** Soit  $f$  une fonction holomorphe sur un ouvert contenant le disque fermé  $\overline{D(0, R)}$ . On note  $M = \max_{|z|=R} |f(z)|$ .

- (1) Soit  $0 < \rho < 1$ . Montrer que si  $|z| < \rho R$  alors  $|f(z) - f(0)| < M \frac{\rho}{1-\rho}$ .
- (2) En déduire que si  $f(0) \neq 0$  alors  $f(z) \neq 0$  pour tout  $z$  tel que  $|z| < \frac{|f(0)|R}{|f(0)|+M}$ .

**Exercice 12.** Soit  $f = \sum a_n z^n$  une fonction holomorphe dans le disque unité telle que  $|f(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)}$  pour tout  $|z| < 1$ . Montrer que

$$|a_n| \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1) < (n+1)e.$$

**Exercice 13.** Soit  $U$  le disque unité ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{C}^*$  une fonction holomorphe continue jusqu'au bord. Montrer que pour tout  $z_0 \in U$ , il existe deux nombres complexes distincts  $z_1, z_2 \in \partial U$  tels que  $|f(z_0)| = |f(z_1)| = |f(z_2)|$ .

**Exercice 14 (\*)**. On veut montrer que  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|1 - ae^{it}| dt = \sup(0, \ln|a|)$ . On considère  $\Omega = \{z \mid \operatorname{Re}(z) < 1\}$ .

- (1) Montrer qu'il existe  $h$  holomorphe sur  $\Omega$  telle que  $e^{h(z)} = 1 - z$  et  $h(0) = 0$ .
- (2) Soit  $0 < \delta < \pi$ . Exprimer  $I(\delta) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{h(z)}{z} dz \right]$ , où  $\Gamma(t) = e^{it}$  et  $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$ , en fonction d'une intégrale de  $\ln|1 - e^{it}|$ .
- (3) Montrer que  $I(\delta) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{h(z)}{z} dz \right]$  où  $\gamma$  est l'arc de cercle de centre 1 joignant  $e^{i\delta}$  à  $e^{-i\delta}$  en restant dans  $\Omega$ .
- (4) Déduire le résultat en montrant que  $I(\delta)$  tend vers 0 avec  $\delta$ .
- (5) Montrer par la même méthode ( (1) et (2) avec  $\delta = 0$  suffisent) que  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|1 - ae^{it}| dt = 0$  pour  $|a| < 1$ .
- (6) En déduire que  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|1 - ae^{it}| dt = \ln|a|$  pour  $|a| > 1$ .