TD 2. Fonctions holomorphes

Exercice 1. Montrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et vérifie $f'(z) = \frac{-1}{z^2}$.

Exercice 2. En quels points la fonction $z \mapsto \bar{z}$ est-elle dérivable au sens complexe ? Même question pour $z \mapsto |z|^2$.

Exercice 3. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U. Les fonctions

$$z \mapsto \overline{f(z)} \text{ sur } U, \quad z \mapsto \overline{f(\bar{z})} \text{ sur } \overline{U} = \{z \mid \bar{z} \in U\} \quad \text{et} \quad z \mapsto f(\bar{z}) \text{ sur } \overline{U}$$

sont-elles holomorphes ?

Exercice 4. Existe-t-il une fonction $f = P + iQ$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que les fonctions $(x,y) \mapsto P(x,y)$ et $(x,y) \mapsto Q(x,y)$ soient de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^2$, mais f ne soit pas holomorphe dans $\mathbb{C}$?

Exercice 5. Trouver toutes les fonctions holomorphes f telles que :

(1) $\mathrm{Re}(f(z)) = C$, où C est une constante,
(2) $\mathrm{Re}(f(z)) = \frac{x}{x^2+y^2}$,
(3) $\mathrm{Re}(f(z)) = \cos x$.

Exercice 6. Soit $\exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

(1) Montrer que la fonction exp est définie sur $\mathbb{C}$ et continue.
(2) Montrer que la fonction exp est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et donner sa dérivée.
(3) En déduire que les fonctions suivantes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$:

$$\sin(z) := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \text{ et } \cos(z) := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}.$$

Exercice 7. Soit $\Omega := \{z \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Montrer que la fonction $L(z) := \ln|z| + i\arctan(\frac{y}{x})$ est holomorphe sur Ω.

Exercice 8. Soit $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{e^z + e}\right)$.

(1) Quel est le plus grand ouvert U sur lequel f est holomorphe ?
(2) Trouver les zéros de f.
(3) Montrer que cet ensemble possède un point d'accumulation dans $\mathbb{C}$.

Exercice 9. Soit f une fonction entière telle que $|f(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$. Montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros.

Exercice 10. Soit $f(z) = \sin\frac{\pi}{1-z}$. Montrer que f est analytique sur le disque ouvert $|z| < 1$. Quels sont les zéros de f sur ce disque ? Est-ce contradictoire avec le principe des zéros isolés ?

Exercice 11. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

(1) Montrer que, pour tout $0 \leq r < R$,
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

(2) En déduire que
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq M(r)^2,$$
où $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, et que pour tout $n \geq 0$, on a l'inégalité de Cauchy $|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$.

(3) On suppose que $R = +\infty$ et qu'il existe un entier $k \geq 0$ et des constantes $c \geq 0$, $r_0 \geq 0$ tels que $M(r) \leq cr^k$ pour tout $r \geq r_0$. Montrer que f est un polynôme de degré $\leq k$.

Exercice 12. Soit f une fonction continue sur le disque fermé $\overline{D}(0, 1)$, analytique sur le disque ouvert $D(0, 1)$ et nulle sur le demi-cercle $\mathrm{Im}(z) \geq 0$. Montrer que f est nulle. *Indication : on pourra considérer $g(z) = f(z)f(-z)$.*

Exercice 13. Soient f et g deux fonctions entières, c'est-à-dire développables en séries entières sur $\mathbb{C}$ entier. On suppose que
$$|f(z)| \leq |g(z)| \text{ pour tout } z.$$
Quelle conclusion peut-on en tirer ?

Exercice 14 $(*)$**.** Soit $(\lambda_k)_{k\geq 0}$ une suite de nombres complexes.

(1) Montrer que s'il existe une fonction entière non identiquement nulle dont les zéros sont exactement les λ_k comptés avec multiplicité, alors il faut nécessairement que $\lim_{k\to+\infty} |\lambda_k| = +\infty$.

(2) Montrer que si f est entière et non constante sur $\mathbb{C}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $f^{-1}(\lambda)$ est au plus dénombrable.

(3) Donner des exemples de fonctions entières ayant aucun, un nombre fini, ou une infinité de 0 sur $\mathbb{C}$.

Exercice 15 $(*)$**.** On définit les opérateurs différentiels $\partial = \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ et $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$.

(1) Calculer $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z^k \bar{z}^m)$ pour $k, m \in \mathbb{N}$. En déduire qu'un polynôme des deux variables réelles x et y à coefficients complexes $P(x,y) = \sum_{k,m=0}^{N} \beta_{k,m} x^k y^m$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ si, et seulement si, il s'écrit sous la forme $P(x+iy) = \sum_n a_n (x+iy)^n$, où les a_n sont des nombres complexes (que l'on ne demande pas de calculer en fonction des $\beta_{k,m}$).

(2) Soit f une fonction de classe C^2 (au sens réel) sur un ouvert D de $\mathbb{C}$. Montrer que
$$4\partial\bar{\partial} f = \Delta f \text{ sur } D,$$
où Δ est l'opérateur laplacien. En déduire que si f est holomorphe sur D, alors
$$\Delta \mathrm{Re} f \equiv \Delta \mathrm{Im} f \equiv 0 \text{ sur } D.$$

(3) Soient Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $f, g \in \mathcal{H}ol(\Omega)$. Vérifier que
$$\partial\bar{\partial}(f\overline{g}) = f'\overline{g'}.$$
En déduire que si $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{H}ol(\Omega)$ sont telles que $|f_1|^2 + \cdots + |f_n|^2$ est constante sur Ω, alors chacune des fonctions f_k doit être constante sur Ω.