UNIVERSITE PAUL SABATIER 2018–2019

Analyse Hilbertienne - L2 Spé Math/Phy

DEVOIR MAISON : À RENDRE LE 16 AVRIL 2019

Exercice I

Nous allons étudier l'évolution de la chaleur à l'intérieur d'une tige rectiligne homogène, de section petite par rapport à la longueur, que l'on suppose infinie. On note $u(x,t)$ la température de la tige au temps t, à l'abscisse x. L'équation aux dérivées partielles associée à est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(où $a = \frac{\lambda}{\rho c}$, avec λ conductivité de la tige, ρ sa masse volumique et c sa chaleur). On suppose que la tige est soumise à la condition initiale $u(x,0) = \varphi(x)$, où φ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, et bornée. On suppose u de classe C^2 par rapport à x et de classe C^1 par rapport à t.

1. Appliquer la transformée de Fourier par rapport à x aux deux membres de l'équation, et en déduire une équation différentielle vérifiée par $\widehat{u}(x,t)$ que l'on résoudra.
2. Utiliser la tranformée de Fourier inverse et exprimer $u(x,t)$ à l'aide d'un produit de convolution.

Exercice II

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée, on cherche une fonction $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

On suppose que f est telle que u soit deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et absolument intégrable. On note $\hat{u}$ la transformée de Fourier de u, et $\hat{f}$ celle de f.

1. Démontrer que $\hat{u}$ satisfait l'équation : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(1 + 4\pi^2 t^2)\hat{u}(t) = \hat{f}(t).$$

2. Exprimer u comme un produit de convolution et en déduire :

$$u(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-|x-y|} dy.$$

3. Donner l'expression de u sans intégrale, lorsque $f(x) = e^{-2|x|}$.