Université Paul Sabatier | Année 2018–2019
L2 Parcours Spéciaux, Intégration | Semestre 3

Intégration - Contrôle Partiel - 15 octobre 2018

Les documents, machines à calculer, téléphones portables, ordinateurs et tablettes sont interdits. Cette épreuve dure 1h30. Toute réponse devra être **justifiée** et **rédigée** correctement.

Exercice 1 : Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t\, dt$ 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{t}}-1}{2t}\, dt$ 3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\, dt$

Exercice 2 : Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{3n}{1+2^n}$ 2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n\ln\left(1+\frac{n+1}{n^4+2n+1}\right)$ 3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n e^{-n^2}}{n}$

Exercice 3 : 1. Montrer que si $\alpha > 0$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}$.

2. En déduire que pour tous $a > 0$ et $b > 0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n = e^{a-b}$.

3. Si $a > 0$ et $b > 0$ on définit $u_n = \displaystyle\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$. Donner la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ en fonction de a et b.

Exercice 4 : On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive et décroissante et on suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ converge. On notera $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ la somme partielle et $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ la somme de cette série.

Pour $n \geq 1$, on définit $u_n = n(a_{n-1} - a_n)$ et on note $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\sigma_n = S_{n-1} - na_n$.
3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et que, si on note $\sigma = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de cette série, alors on a $\sigma \leq S$.
4. Si on suppose que $\sigma < S$, montrer qu'alors $a_n \sim \dfrac{S-\sigma}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire que forcément $\sigma = S$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

Exercice 5 : *Facultatif*

On considère deux suites positives $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on suppose qu'elles sont équivalentes lorsque n tend vers $+\infty$. On suppose que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ convergent et on note $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les restes, c'est-à-dire $U_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $V_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

Montrer que $U_n \sim V_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction

Exercice 1 : 1. Si $X > 0$ on a $\displaystyle\int_0^X \sin t\,dt = -\cos X + 1$. Or $\cos X$ n'a pas de limite lorsque X tend vers $+\infty$ donc, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t\,dt$ diverge.

2. Il faut étudier la convergence de l'intégrale en 0. Remarquons d'abord que $\dfrac{e^{\sqrt{t}}-1}{2t} \geq 0$ pour tout $t \in [0;1]$. On sait que pour u proche de 0, on a $e^u - 1 \sim u$. Ici, on obtient alors $\dfrac{e^{\sqrt{t}}-1}{2t} \sim \dfrac{\sqrt{t}}{2t}$ pour t proche de 0. Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}}\,dt$ converge $(1/2 < 1)$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{t}}-1}{2t}\,dt$ converge également.

3. On va montrer que l'intégrale est absolument convergente, ce qui montrera la convergence. On a, pour tout $t \geq 1$, $\left|\dfrac{\cos t}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$. Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge, on obtient le résultat annoncé.

Exercice 2 : 1. Remarquons d'abord que $u_n = \dfrac{3n}{1+2^n}$ est positif. On va utiliser la règle de d'Alembert. On peut d'abord remarquer, pour simplifier, que $u_n \sim v_n$ avec $v_n = \dfrac{3n}{2^n}$ (il suffit de vérifier que u_n/v_n tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini). Ensuite, on écrit

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3(n+1)}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{3n} = \frac{n+1}{2n}$$

par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n/v_n = 1/2 < 1$. La règle de d'Alembert nous permet alors de conclure que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ converge et donc, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge aussi, par équivalence.

2. Remarquons que si on note $\alpha_n = \dfrac{n+1}{n^4+2n+1}$ alors $\alpha_n \geq 0$ pour tout n donc, $w_n = n\ln(1+\alpha_n)$ est positif pour tout n.

De plus, on sait que pour X proche de 0, on a $\ln(1+X) \sim X$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, on peut écrire

$$w_n \sim n \times \frac{n+1}{n^4+2n+1} \sim \frac{1}{n^2}\,.$$

Comme la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} w_n$ converge également.

3. C'est une série alternée de terme général $(-1)^n a_n$ avec $a_n = \dfrac{e^{-n^2}}{n}$ Il suffit de montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est positive, décroissante et tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Il suffit d'écrire $a_n = \dfrac{1}{ne^{n^2}}$. Il est clair que $a_n \geq 0$ pour tout n. Par ailleurs, comme ne^{n^2} tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini, on a bien $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Enfin, comme $(n+1)^2 \geq n^2$ pour tout $n \geq 0$ et la fonction exponentielle est croissante, la suite de terme général ne^{n^2} est croissante et donc la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Exercice 3 : 1. On a $\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)}$. Maintenant, on sait que si X est proche de 0 alors $\ln(1+X) \sim X$ donc, ici, $n\ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right) \sim n \times \frac{\alpha}{n}$. On obtient alors bien la limite demandée.

2. Attention, il faut éviter d'additionner les équivalents. On peut écrire par exemple

$$\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n = \left(\frac{n+a}{n} \times \frac{n}{n+b}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{b}{n}\right)^n}$$

En passant à la limite on obtient d'après la question précédente e^a/e^b c'est-à-dire e^{a-b}.

3. Comme u_n est positif pour tout n, on peut utiliser la règle de Cauchy. On a $u_n^{1/n} = \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n$ donc, d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = e^{a-b}$.

On distingue donc trois cas. Si $a < b$ alors $e^{a-b} < 1$ et donc la série converge d'après la règle de Cauchy. De même, si $a > b$ alors $e^{a-b} > 1$ et donc la série diverge. Si $a = b$, la règle de Cauchy ne donne rien mais on voit que dans ce cas, on a $u_n = 1$ pour tout n donc la série diverge (grossièrement).

Exercice 4 : 1. Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante, on a $a_{n-1} - a_n \geq 0$ pour tout n donc $u_n \geq 0$ pour tout n.

2. On montre que $\sigma_n = S_{n-1} - na_n$. Il suffit d'écrire

$$\sigma_n = (a_0 - a_1) + 2(a_1 - a_2) + 3(a_2 - a_3) + \ldots + (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1}) + n(a_{n-1} - a_n)$$

ce qui donne, après simplification, $\sigma_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} - na_n$.

3. Attention à la rédaction de cette question. On rappelle que comme u_n est positif pour tout n, la suite des sommes partielles $(\sigma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante donc, elle converge si et seulement si elle est majorée.

D'après la question précédente on a, pour tout n, $\sigma_n = S_{n-1} - na_n \leq S_{n-1}$ car $na_n \geq 0$. Or, la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ converge avec $a_n \geq 0$ pour tout n donc, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et converge vers S. On en déduit que $S_{n-1} \leq S$ pour tout n. Par conséquent, $\sigma_n \leq S$ pour tout n ce qui donne la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

4. Il faut montrer que a_n est équivalent à $\dfrac{S-\sigma}{n}$.

On suppose que $\sigma < S$. D'après la deuxième question, on a $a_n = \dfrac{S_{n-1} - \sigma_n}{n}$. Par conséquent, puisque S_{n-1} et σ_n tendent respectivement vers S et σ lorsque n tend vers l'infini, il est clair que la limite en l'infini du quotient $\frac{a_n}{\frac{S-\sigma}{n}}$ est 1. On en déduit que $a_n \sim \dfrac{S-\sigma}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Maintenant, comme la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge alors que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ converge, on arrive à une contradiction. Par conséquent, $S = \sigma$. Pour finir, on écrit $na_n = S_{n-1} - \sigma_n$ donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

Exercice 5 : Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $u_n \sim v_n$ il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $k \geq N$ on a $1 - \varepsilon \leq \dfrac{u_k}{v_k} \leq 1 + \varepsilon$ c'est-à-dire $(1-\varepsilon)v_k \leq u_k \leq (1+\varepsilon)v_k$.

Comme on a par définition $U_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $V_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ alors, si $n \geq N$, on aura $(1-\varepsilon)V_n \leq U_n \leq (1+\varepsilon)V_n$. On obtient alors $1 - \varepsilon \leq \dfrac{U_n}{V_n} \leq 1 + \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ ce qui donne bien $U_n \sim V_n$ lorsque n tend vers l'infini.