Université Paul Sabatier S4, Année 2018–2019
L2 Spé Math/Phy, Analyse Hilbertienne

Contrôle Continu du 5 mars 2019
(13h30-15h00)

Note: *Toute réponse doit être justifiée. Il est conseillé de soigner votre présentation. Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables et calculatrices doivent être éteints et rangés.*

Exercice I

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(t) = |\cos(t)|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(1) Représenter la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
(2) Vérifier que la fonction f est π-périodique, paire, continue et de classe C^1 par morceaux.
(3) Calculer les coefficients de Fourier complexes de f et la série de Fourier en notation complexe de la fonction f.
(4) Etudier la convergence de la série de Fourier de f.
(5) En déduire les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}\,.$$

Exercice II

Soit $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ une suite de nombres complexes et soit $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par

$$S_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} \gamma_k e^{ikt} \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}.$$

(1) Quelles hypothèses sur la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ assurent que la suite d'applications $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction notée f ?
(2) En se plaçant sous les hypothèses du point précedent, montrer que la fonction limite f est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.
(3) Donner la définition des coefficients de Fourier complexes $c_n(f)$ de f pour $n \in \mathbb{Z}$.
(4) Montrer que $c_n(f) = \gamma_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice III

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et 2π-périodique telle que $c_n(f) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et 2π-périodique non nulle et telle que

$$f * g = \lambda g.$$

(1) Rappeler la relation entre les coefficients de Fourier $c_n(f*g)$ de $f*g$ et les coefficients de Fourier $c_n(f)$ de f et $c_n(g)$ de g.
(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $c_n(g) \neq 0$ on a $c_n(f) = \lambda$.
(3) En utilisant le fait que $\lim_{n\to+\infty} c_n(f) = \lim_{n\to-\infty} c_n(f) = 0$, montrer que l'ensemble $N_\lambda = \{n \in \mathbb{Z} \mid c_n(f) = \lambda\}$ est fini.
(4) En déduire toutes les fonctions h continues 2π-périodiques telles que $f * h = \lambda h$.

Exercice IV

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x$ pour $x \in [0, 1]$ et nulle sinon.

(1) Vérifier que f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.
(2) Calculer la tranformée de Fourier de la fonction f.

Contrôle Continu du 6 mars 2018

(10h05-11h35)

Documents, calculatrices, téléphone interdits

Note: *Toute réponse doit être justifiée. Il est conseillé de soigner votre présentation. Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables et calculatrices doivent être éteints et rangés.*

Exercice I

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et absolument intégrable sur $[0, 2\pi]$.

(1) Donner la définition des coefficients de Fourier complexes $c_n(f)$ de f pour $n \in \mathbb{Z}$.
(2) Donner la définition en notation complexe de polynôme trigonométrique.
(3) Montrer que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue 2π-périodique et P est un polynôme trigonométrique, alors $f * P$ est un polynôme trigonométrique.
(4) Donner la définition d'unité approchée des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.
(5) Est-il vrai que toute fonction continue $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et 2π-périodique est la limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques ?

Exercice II

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On considère la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = \exp(i\alpha x)$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.

(1) Est-ce que f est continue sur $\mathbb{R}$? Sinon, indiquer les points de discontinuité de f.
(2) Calculer les coefficients de Fourier complexes de f.
(3) Calculer la série de Fourier en notation complexe de la fonction f.
(4) Que peut-on dire sur la convergence de la série de Fourier de f ?
(5) Déduire de la formule de Parseval que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha+n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin(\alpha\pi)^2}$$

(6) *Facultatif :* Calculer la valeur de

$$\sum_{n\geq 0} \frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2}.$$

Exercice III

On rappelle que si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont deux fonctions continues 2π-périodiques, alors $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.

(1) Pour $n \in \mathbb{Z}$ on note $e_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $e_n(t) = e^{int}$. Montrer que $e_n * e_n = e_n$.
(2) Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 2π-périodique telle que $g * g = g$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g) = 0$ ou $c_n(g) = 1$.
   (b) En utilisant le fait que

$$\lim_{n\to+\infty} c_n(g) = \lim_{n\to-\infty} c_n(g) = 0,$$

   montrer que $c_n(g) = 0$ sauf pour un nombre fini d'entiers $n \in \mathbb{Z}$.
   (c) En déduire toutes les fonctions g continues 2π-périodiques telles que $g * g = g$.

Contrôle Continu du 15 mars 2017

(15h45-17h15)

Documents, calculatrices, téléphone interdits

Note: *Toute réponse doit être justifiée. Il est conseillé de soigner votre présentation. Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables et calculatrices doivent être éteints et rangés.*

Exercice I

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et intégrable sur $[0, 2\pi]$.

(1) Donner la définition des coefficients de Fourier $c_n(f)$ de f pour $n \in \mathbb{Z}$.

(2) Montrer que si f est à valurs réelles et paire, alors $c_{-n}(f) = c_n(f)$ et $c_n(f)$ est réel pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(3) Montrer que si f est de classe C^1, alors $c_n(f') = inc_n(f)$.

(4) Donner l'énoncé de la formule de Parseval.

Exercice II

On considère la fonction 2π-périodique f telle que $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$.

(1) Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

(2) Calculer la série de Fourier de la fonction f.

(3) Que peut-on dire sur la convergence de la série de Fourier de f ?

(4) En utilisant la formule de Parseval, déduire la valeur de

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}.$$

(5) Déduire des questions précédentes que la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

est convergente et déterminer sa somme.

Exercice III

(1) Montrer que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue 2π-périodique et P est un polynôme trigonométrique, alors $f * P$ est un polynôme trigonométrique.

(2) Donner la définition d'unité approchée des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et T-périodiques, où $T > 0$.

Examen Session 2 – 25 juin 2019

(07h45-09h45)

Documents, calculatrices, téléphone interdits

Note: *Toute réponse doit être justifiée. Il est conseillé de soigner votre présentation. Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables et calculatrices doivent être éteints et rangés.*

Exercice I

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et 2π-périodique.

(1) Donner la définition des coefficients de Fourier $c_n(f)$ de f pour $n \in \mathbb{Z}$.

(2) Déterminer les coefficients $c_n(f)$ pour la fonction $f(x) = x$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$ et prolongée par périodicité, ainsi que sa série de Fourier.

(3) Donner l'énoncé de la formule de Parseval.

(4) Déduire que
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice II

On rappelle que si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont deux fonctions continues par morceaux et 2π-périodiques, alors $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$ (où $c_n(f)$ dénote l'n-ième coefficient de Fourier de f).

(1) Pour $n \in \mathbb{Z}$ on note $e_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $e_n(t) = e^{int}$. Montrer que $e_n * e_n = e_n$.

(2) Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 2π-périodique telle que $g * g = g$.

  (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g) = 0$ ou $c_n(g) = 1$.

  (b) En utilisant le fait que
$$\lim_{n\to+\infty} c_n(g) = \lim_{n\to-\infty} c_n(g) = 0,$$
  montrer que $c_n(g) = 0$ sauf pour un nombre fini d'entiers $n \in \mathbb{Z}$.

  (c) En déduire toutes les fonctions g continues 2π-périodiques telles que $g * g = g$.

Exercice III

(1) Soit $f := \pi \cdot \chi_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}$, où $\chi_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(x) = 1$ si $-\frac{1}{2\pi} \leq x \leq \frac{1}{2\pi}$, et 0 sinon. Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f.

(2) Rappeler la définition de produit de convolution.

(3) Demontrer que si f et g sont deux fonctions absolument intégrables et bornées sur $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\hat{g}$.

(4) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $g(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$.

(5) En déduire que
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \pi.$$

Exercice IV

On se place dans $H := L^2(-\pi,\pi]$. On prolonge toutes les fonctions pour être périodiques de période 2π, autrement dit, si $x \in (\pi, 3\pi]$ par exemple, on pose $f(x) := f(x-2\pi)$, et ainsi de suite. On rappelle que pour f et g dans cet espace, dont l'existence est admise, $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ et $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$ ont un sens ; que H contient l'ensemble des fonctions continues comme un sous-espace dense ; et qu'on assimile toute fonction f telle que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 0$ à la fonction nulle, et donc deux fonctions qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points seront considérées comme égales. On pose

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

On rappelle que la densité des fonctions continues dans H implique que pour tout $f \in H$, on a que $\lim_{n\to\infty} \|S_n(f) - f\| = 0$, et donc que $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de H, où $e_n(x) := e^{inx}$. On rappelle aussi que pour tout sous-ensemble B de H, son orthogonal $B^\perp$ est fermé.

Soit A l'espace des fonctions π-périodiques, c'est-à-dire telles que $f(x+\pi) = f(x)$, pour tout x. On pose $A_0 := \{e_{2k}, k \in \mathbb{Z}\}$, $A_1 := \{e_{2k+1}, k \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Montrer que A_0 est un système orthonormé et que $A_0 \subset A$.
(2) Montrer que $A_1 \subset A^\perp \subset A_0^\perp$.
(3) Montrer que $\operatorname{Vect} A_0 \subset A_1^\perp$ et en déduire que $\overline{\operatorname{Vect} A_0} \subset A_1^\perp$.
(4) En utilisant le fait que $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de H, montrer que $\overline{\operatorname{Vect} A_0} = A_1^\perp$.
(5) Montrer que A est fermé, et en déduire que $A = A_1^\perp$.

Examen Session 1 – 30 avril 2019

(10h15-12h15)

Documents, calculatrices, téléphone interdits

Note: *Toute réponse doit être justifiée. Il est conseillé de soigner votre présentation. Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables et calculatrices doivent être éteints et rangés.*

Questions de Cours

(1) Donner la définition de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ainsi que les deux caractérisations équivalentes vues en TD.

(2) Les fonctions suivantes sont-elles dans l'espace de Schwartz ? Justifiez brièvement vos réponses.
   (a) $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$.
   (b) $f(x) = e^{-4x}$.
   (c) $f(x) = e^{-|x|^3}$.
   (d) $f(x) = e^{-2x^2}$.

(3) Rappeler la définition de la transformée de Fourier d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

(4) Soit f une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $\delta > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Donner la transformée de Fourier de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = f(\delta(x-a))$ (procéder en deux étapes ; *on ne demande pas de redémontrer les résultats du cours*).

Exercice I

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x \text{ si } -1 \le x \le 0, \\ 1-x \text{ si } 0 \le x \le 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

(1) Représenter graphiquement la fonction f pour $x \in [-3, 3]$.

(2) Montrer que la fonction f est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

(3) Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}$ de la fonction f.

Exercice II

(1) Soit $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la transformée de Fourier de h ne peut pas être la fonction constante identiquement égale à 1. (Indication : quel doit être le comportement de $\hat{h}(\xi)$ pour $|\xi| \to +\infty$? Utiliser un résultat du cours).

(2) Soit $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction Gaussienne $G(x) = e^{-\pi x^2}$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $G * h = G$.

(3) Trouvez toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et absolument intégrables sur $\mathbb{R}$ qui sont solution de l'équation $f * f = f$.

Exercice III

On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit intérieur $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On rappelle qu'une forme linéaire est une application linéaire de E dans $\mathbb{C}$. Une forme linéaire φ est continue si et seulement si pour toute suite $(f_n) \subset E$ telle que $f = \lim_n f_n$ (au sens de la norme donnée par le produit intérieur), alors $\lim_n \varphi(f_n) = \varphi(f)$.

(1) Montrer que, si φ est une forme linéaire continue, alors $\ker(\varphi) = \{v \in E \mid \varphi(v) = 0\}$ est un sous espace vectoriel fermé de E.

(2) On prend $E = \mathcal{C}([-1,1])$, muni du produit intérieur $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$, et on considère l'application $\varphi_0 \colon E \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi_0(f) := f(0)$ pour tout $f \in \mathcal{C}([-1,1])$. Montrer que φ_0 est une forme linéaire non continue. (Indication : on peut construire une suite de fonctions $\{f_n\} \subset \mathcal{C}([-1,1])$ qui converge vers la fonction nulle au sens de la norme L^2, mais sans convergence simple en $x = 0$).

(3) On reprend E un espace vectoriel quelconque E muni d'un produit intérieur. Montrer que pour tout $g \in E$, $\varphi_g(f) := \langle f, g \rangle$ définit une forme linéaire continue.

(4) Désormais on suppose que E est un espace de Hilbert, et φ une forme linéaire continue non identiquement nulle.

   (a) Expliquer pourquoi on peut définir une projection orthogonale sur $\ker(\varphi)$ et en déduire que $\ker(\varphi) \oplus \ker(\varphi)^\perp = E$.

   (b) Démontrer que $\ker(\varphi)^\perp \neq \overrightarrow{0}$. (Indication : prendre $u \in E$ tel que $\varphi(u) \neq 0$ et considérer sa décomposition sur $\ker(\varphi) \oplus \ker(\varphi)^\perp = E$).

   (c) Montrer qu'on peut trouver $g \in \ker(\varphi)^\perp$ tel que $\varphi(g) = \|g\|^2$ (indication : prendre $g_0 \in (\operatorname{Ker} \varphi)^\perp \setminus \{0\}$, et la multiplier par un scalaire convenable), et que $\{g\}$ est une base de $\ker(\varphi)^\perp$ (indication : si $f \in \ker(\varphi)^\perp$, trouver λ tel que $\varphi(f - \lambda g) = 0$).

   (d) Montrer que pour tout $f \in E$, $\varphi(f) = \langle f, g \rangle$ (indication : trouver λ tel que $\varphi(f - \lambda g) = 0$ et décomposer $f = (f - \lambda g) + \lambda g$).

Donc, toute forme linéaire continue peut se représenter par un produit intérieur comme dans la question (3). Ceci s'appelle le *Théorème de représentation de Riesz.*

Université Paul Sabatier S4, Année 2017–2018

L2 Spé Math/Phy, Analyse Hilbertienne

Examen Session 2 – 26 juin 2018

(14h-16h)

Documents, calculatrices, téléphone interdits

Note: *Toute réponse doit être justifiée. Il est conseillé de soigner votre présentation. Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables et calculatrices doivent être éteints et rangés.*

Exercice I

On rappelle que si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont deux fonctions continues 2π-périodiques, alors $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$ (où $c_n(f)$ dénote l'n-ième coefficient de Fourier de f).

(1) Pour $n \in \mathbb{Z}$ on note $e_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $e_n(t) = e^{int}$. Montrer que $e_n * e_n = e_n$.

(2) Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 2π-périodique telle que $g * g = g$.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g) = 0$ ou $c_n(g) = 1$.

   (b) En utilisant le fait que
$$\lim_{n\to+\infty} c_n(g) = \lim_{n\to-\infty} c_n(g) = 0,$$
   montrer que $c_n(g) = 0$ sauf pour un nombre fini d'entiers $n \in \mathbb{Z}$.

   (c) En déduire toutes les fonctions g continues 2π-périodiques telles que $g * g = g$.

Exercice II

(1) Donner la définition de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ainsi que les deux caractérisations équivalentes vues en TD.

(2) Les fonctions suivantes sont-elles dans l'espace de Schwartz ? Justifiez brièvement vos réponses.

   (a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

   (b) $f(x) = e^{-x}$.

   (c) $f(x) = e^{-|x|}$.

   (d) $f(x) = e^{-x^2}$.

Exercice III

(1) Soit $f := \pi \cdot \chi_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}$, où $\chi_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(x) = 1$ si $-\frac{1}{2\pi} \leq x \leq \frac{1}{2\pi}$, et 0 sinon. Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f.

(2) Rappeler la définition de produit de convolution.

(3) Demontrer que si f et g sont deux fonctions absolument intégrables et bornées sur $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\hat{g}$.

(4) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $g(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$.

(5) En déduire que
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \pi.$$

Exercice IV

Soit $E = \mathcal{C}([-1,1])$, l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$. On pose, pour $f, g \in E$,

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

(1) Montrer que l'intégrale ci-dessus converge pour tous $f, g \in E$.

(2) Montrer que $\langle f, g\rangle$ définit un produit hermitien. On note $\|f\| := \langle f, f\rangle^{1/2}$ la norme associée.

(3) En faisant le changement de variable $\theta = \arccos x$, montrer que

$$\langle f, g\rangle := \int_{0}^{\pi} f(\cos\theta)\overline{g(\cos\theta)}d\theta.$$

(4) On définit la fonction T_n sur l'intervalle $[-1,1]$ par $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, pour $\theta \in [0,\pi]$. Donner T_0, T_1, T_2.

(5) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n coïncide avec une fonction polynômiale de degré n. *Indication : on peut utiliser des exponentielles complexes.*

(6) Montrer par recurrence que

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1,1]$.

(7) Calculer $\langle T_n, T_m\rangle$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$.

(8) Montrer que le système $S_n := \{T_0, T_1, \ldots, T_n\}$ est orthogonal, et montrer que c'est une base du sous-espace E_n de E constitué des fonctions polynomiales de degré $\leq n$.

(9) On pose $\widetilde{T}_n := \frac{1}{\|T_n\|}T_n$. On admet que les polynômes forment un sous-ensemble dense de $L^2[-1,1]$. Montrer que $\left\{\widetilde{T}_n, n \geq 0\right\}$ forme une base hilbertienne de $L^2[-1,1]$.

Contrôle Terminal du 02 mai 2018

(13h15-15h15)

Documents, calculatrices, téléphone interdits

Note: *Toute réponse doit être justifiée. Il est conseillé de soigner votre présentation. Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables et calculatrices doivent être éteints et rangés.*

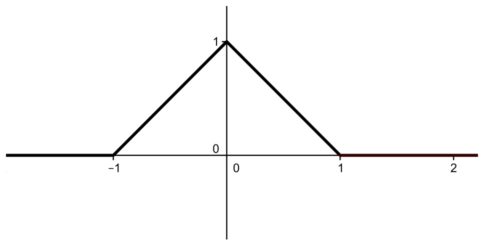
Exercice I

(1) Soit $P(x) = \chi_{[-1/2,1/2]}(x)$ la fonction porte définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } & |x| \leq 1/2 \\ 0 \text{ si } & |x| > 1/2 \end{cases}$

(a) Montrer que P est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) Calculer la transformée de Fourier $\widehat{P}$.

(2) Soit L la fonction, affine par morceaux, valant 0 sur $]-\infty,-1]$ et $[1,+\infty[$, et 1 au point $x = 0$, dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



(a) Donner l'expression de $L(x)$ sur $[-1,0]$ et $[0,1]$.

(b) Montrer que L est dérivable par morceaux, et montrer que l'on peut écrire $L'(x) = P\left(x+\dfrac{1}{2}\right) - P\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$.

(c) Calculer la transformée de Fourier de L'. En déduire celle de L.

(d) Montrer que L s'exprime en fonction de P par le produit de convolution $L = P * P$.

(3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\varphi_n(x) = (P*\cdots*P)(x)$ la fonction convoluant n-fois la fonction porte.

(a) Calculer la transformée de Fourier de φ_n.

(b) Montrer que φ_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$, polynomiale de degré $n+1$ sur des intervalles de longueur 1 et calculer son support, c'est-à-dire le domaine sur lequel φ_n est non nulle.

Exercice II

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée, on cherche une fonction $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que

$$-u''(x) + u(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On suppose que f est telle que u soit deux fois continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et absolument intégrable. On note $\hat{u}$ la transformée de Fourier de u, et $\hat{f}$ celle de f.

(1) Démontrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\hat{u}$ satisfait l'équation :

$$(1 + 4\pi^2\xi^2)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

(2) Exprimer u comme un produit de convolution et en déduire :

$$u(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-|x-y|}dy.$$

(3) Donner l'expression de u sans intégrale, lorsque $f(x) = e^{-2|x|}$.

Exercice III

On appelle E l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$, muni du produit intérieur

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f_0(x) := 1, \quad f_n(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left((x^2-1)^n\right), \quad n \geq 0.$$

(1) Expliciter f_1, f_2 et f_3.
(2) Montrer que f_n est un polynôme de degré n et préciser son coefficient dominant, c'est-à-dire le coefficient du monôme de plus haut degré de f_n.
(3) Montrer que $\{f_0, \dots, f_n\}$ forme une base de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
(4) Préciser pour tout entier naturel n la parité de f_n.
(5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f_n(1) = 2^n n!$ et calculer $f_n(-1)$. (*Indication : on pourra utiliser la formule de Leibniz*).
(6) Montrer que pour tous entiers naturels n et m on a

$$\int_{-1}^{1} f_n(x)f_m(x)dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n \left(\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^m\right) dx$$

(7) Si $n > m \geq 0$, montrer que $\int_{-1}^{1} f_n(x)f_m(x)dx = 0$.
(8) On admet que l'espace engendré par $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E. On pose $c_n := \int_{-1}^{1} |f_n(x)|^2 dx$ (on ne demande pas de calculer c_n explicitement) ; donner une base hilbertienne de E.

NB — Cette famille de polynômes orthogonaux est connue sous le nom de *polynômes de Legendre*.

Examen Session 2 – 29 juin 2017

(10h-12h)

Documents, calculatrices, téléphone interdits

Note: *Toute réponse doit être justifiée. Il est conseillé de soigner votre présentation. Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables et calculatrices doivent être éteints et rangés.*

Cette épreuve comporte quatre exercices. Il y a beaucoup de questions indépendantes. Faites ce que vous savez faire dans le temps imparti, vous n'avez pas besoin de tout faire, mais faites bien (et faites des questions des trois exercices).

Exercice I

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et 2π-périodique.

(1) Donner la définition des coefficients de Fourier $c_n(f)$ de f pour $n \in \mathbb{Z}$.
(2) Déterminer les coefficients $c_n(f)$ pour la fonction $f(x) = x$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$ et prolongée par périodicité, ainsi que sa série de Fourier.
(3) Donner l'énoncé de la formule de Parseval.
(4) Déduire que
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice II

(1) Soit $f := \pi\chi_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}$, où $\chi_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}(x) = 1$ si $-\frac{1}{2\pi} \leq x \leq \frac{1}{2\pi}$, et 0 sinon. Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f.
(2) Rappeler la définition de produit de convolution.
(3) Demontrer que si f et g sont deux fonctions absolument intégrables et bornées sur $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\hat{g}$.
(4) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $g(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$.
(5) En déduire que
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \pi.$$

T.S.V.P.

Exercice III

(1) Soit h une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la transformée de Fourier de h ne peut pas être la fonction identiquement égale à 1.
(2) Soit $G(x) = e^{-\pi x^2}$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction h absolument intégrable bornée sur $\mathbb{R}$ telle que $G * h = G$.
(3) On suppose que $(K_\delta)_\delta$ est une identité approchée qui vérifie de plus que pour tout $\delta > 0$, K_δ est continue, paire, bornée. Montrer que $\widehat{K_\delta}(\xi)$ est à valeurs réelles et que $-1 \leq \widehat{K_\delta}(\xi) \leq 1$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
(4) Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$, continue et bornée. En appliquant un résultat du cours, calculer $\lim_{\delta \to 0, \delta > 0} K_\delta * f(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.
(5) Montrer que $\lim_{\delta \to 0, \delta > 0} \widehat{K_\delta}(\xi) = 1$.
(6) Soit f une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, telle que $|f|^2$ soit aussi intégrable sur $\mathbb{R}$. En utilisant la formule de Plancherel, exprimer $\int_{\mathbb{R}} |f * K_\delta(x) - f(x)|^2 \, dx$ sous la forme $\int_{\mathbb{R}} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 L_\delta(\xi) d\xi$, où L_δ dépend de $\widehat{K_\delta}$.

Exercice IV

On appelle E l'espace des fonctions continues sur $[-1, 1]$, muni du produit intérieur

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$f_0(x) := 1, \quad f_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left((1 - x^2)^n \right), \quad n \geq 0.$$

On admet que

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{d}{dx} f_n(x) \right] = -n(n+1) f_n(x).$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}$.

(1) Montrer que f_n est un polynôme de degré n.
(2) Montrer que $\{f_0, \ldots, f_n\}$ forme une base de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
(3) Montrer que $\int_{-1}^{1} f_n(x) dx = 0$ pour $n \geq 1$.
(4) Si $n > m \geq 0$, montrer que $\int_{-1}^{1} f_n(x) f_m(x) dx = 0$.
(5) On admet que l'espace engendré par $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E. On pose $c_n := \int_{-1}^{1} |f_n(x)|^2 dx$ (on ne demande pas de calculer c_n explicitement) ; donner une base hilbertienne de E.

NB — Cette famille de polynômes orthogonaux est connue sous le nom de *polynômes de Legendre.*

Contrôle Terminal du 11 mai 2017

(13h30-15h30)

Documents, calculatrices, téléphone interdits

Note: *Toute réponse doit être justifiée. Il est conseillé de soigner votre présentation. Aucun document n'est autorisé. Les téléphones portables et calculatrices doivent être éteints et rangés.*

Cette épreuve comporte trois exercices. Il y a beaucoup de questions indépendantes. Faites ce que vous savez faire dans le temps imparti, vous n'avez pas besoin de tout faire, mais faites bien (et faites des questions des trois exercices).

Exercice I

(1) Donner la définition de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ainsi que les deux caractérisations équivalentes vues en TD.

(2) Les fonctions suivantes sont-elles dans l'espace de Schwartz ? Justifiez brièvement vos réponses.
 (a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
 (b) $f(x) = e^{-x}$.
 (c) $f(x) = e^{-|x|}$.
 (d) $f(x) = e^{-x^2}$.

Exercice II

(1) Calculer la transformée de Fourier de $f_1(x) := e^{-2\pi|x|}$.

(2) Soit f une fonction absolument intégrable sur $\mathbb{R}$, et $\lambda > 0$. Rappeler la formule qui donne la transformée de Fourier de $x \mapsto f(\lambda x)$ en fonction de celle de f.

(3) Pour $\delta > 0$, on pose $g(x) := e^{-\delta|x|}$. Montrer que la transformée de Fourier de g est donnée par $\hat{g}(\xi) = \frac{2\delta}{\delta^2+4\pi^2\xi^2}$.

(4) On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, $P_y(x) := \frac{y}{\pi(y^2+x^2)}$ (considérée comme une fonction de x dépendant d'un paramètre y).
 (a) Montrer que $\hat{P}_y(\xi) = e^{-2\pi y|\xi|}$.
 (b) Montrer que $(P_y)_{y>0}$ est une identité approchée.

(5) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, $H_f(x,y) := (f * P_y)(x)$. On rappelle que pour $y > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto H_f(x,y)$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
 (a) En appliquant un résultat du cours, calculer $\lim_{y\to 0, y>0} H_f(x,y)$.
 (b) En appliquant un résultat du cours, calculer $\widehat{H}_f(\xi,y) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x\xi} H_f(x,y)dx$.

Exercice III

Soit $E = \mathcal{C}([-1,1])$, l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$. On pose, pour $f, g \in E$,

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

(1) Montrer que l'intégrale ci-dessus converge pour tous $f, g \in E$.
(2) Montrer que $\langle f, g\rangle$ définit un produit hermitien. On note $\|f\| := \langle f, f\rangle^{1/2}$ la norme associée.
(3) En faisant le changement de variable $\theta = \arccos x$, montrer que

$$\langle f, g\rangle := \int_0^{\pi} f(\cos\theta)\overline{g(\cos\theta)}d\theta.$$

(4) On définit la fonction T_n sur l'intervalle $[-1,1]$ par $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, pour $\theta \in [0,\pi]$. Donner T_0, T_1, T_2.
(5) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n coïncide avec une fonction polynômiale de degré n. *Indication : on peut utiliser des exponentielles complexes.*
(6) Montrer par recurrence que

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1,1]$.
(7) Calculer $\langle T_n, T_m\rangle$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$.
(8) Montrer que le système $S_n := \{T_0, T_1, \dots, T_n\}$ est orthogonal, et montrer que c'est une base du sous-espace E_n de E constitué des fonctions polynomiales de degré $\leq n$.
(9) On pose $\widetilde{T}_n := \frac{1}{\|T_n\|}T_n$. On admet que les polynômes forment un sous-ensemble dense de $L^2[-1,1]$. Montrer que $\left\{\widetilde{T}_n, n \geq 0\right\}$ forme une base hilbertienne de $L^2[-1,1]$.