Université Paul Sabatier
L2 Spé Math/Phy, Analyse Hilbertienne

S4, Année 2019-2020

TD 4. Espaces de Hilbert

1. Orthogonal d'un sous-espace et densité

Soit E un espace vectoriel à coefficients complexes, avec un produit intérieur noté $\langle x, y\rangle$. La norme est donnée par $\|x\|^2 := \langle x, x\rangle$. Nous rappelons quelques définitions.

Rappels. Si $A \subset E$, on appelle *orthogonal* de A l'ensemble

$$A^{\perp} := \{x \in E : \forall y \in A, \langle x, y\rangle = 0\}.$$

On voit immédiatement que si $A \subset B$, $B^{\perp} \subset A^{\perp}$. On montre que $A^{\perp}$ est toujours un sous-espace vectoriel de E (même si A est un ensemble quelconque) et que $A \cap A^{\perp} = \{0\}$. Si E est de dimension finie, $(A^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Vect} A$ (sous-espace vectoriel engendré par A).

Un ensemble A est *fermé* si pour toute suite $(x_n)_n \subset A$, qui possède une limite x (c'est-à-dire que $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$), alors $x \in A$. Plus généralement, on appelle *adhérence* de A, et on note $\overline{A}$, l'ensemble de toutes les limites de suites convergentes contenues dans A. C'est un ensemble fermé qui contient A (en fait, c'est le plus petit possible).

Un ensemble A est *dense* dans E si pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n)_n \subset A$, qui possède pour limite x. Autrement dit, $\overline{A} = E$.

Exercice 1. Pour tout sous-ensemble $A \subset E$, montrer que $A^{\perp}$ est fermé (indication : Cauchy-Schwarz).

Exercice 2. On va montrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, $(A^{\perp})^{\perp} = \overline{A}$.

(1) Montrer que pour tout sous-ensemble $A \subset E$, $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$. Déduire de l'exercice précédent que $\overline{A} \subset (A^{\perp})^{\perp}$.
(2) Réciproquement, si $v \in E$, dans quel sous-espace doit être $v - p_{\overline{A}}(v)$? Si $v \in (A^{\perp})^{\perp}$, montrer que $\langle v - p_{\overline{A}}(v), v - p_{\overline{A}}(v)\rangle = 0$ et en déduire que $v \in \overline{A}$.
(3) Corollaire : A est dense dans E si et seulement si $A^{\perp} = \ldots$?

Exercice 3. On considère $E := \mathcal{C}[-1,1]$, muni du produit intérieur $\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx$. On appelle W le sous-espace des fonctions constantes.

(1) Montrer que W est fermé.
(2) Montrer que $W^{\perp} = \{f \in E : \int_{-1}^{1} f(x)dx = 0\}$.
(3) Soit $f \in E$. Quelle est la projection de f sur W ? Sur $W^{\perp}$?
(4) Mêmes questions avec P qui est le sous-espace des fonctions paires.

2. Bases hilbertiennes

Exercice 4. On se place dans $H := L^2(-\pi, \pi]$. On prolonge toutes les fonctions pour être périodiques de période 2π, autrement dit, si $x \in (\pi, 3\pi]$ par exemple, on pose $f(x) := f(x-2\pi)$, et ainsi de suite. On rappelle que quand f et g sont dans cet espace, dont l'existence est admise, $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ et $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$ ont un sens ; qu'il contient l'ensemble des fonctions continues comme un sous-espace dense ; et qu'on assimile toute fonction f telle que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 0$ à la fonction nulle, et donc deux fonctions qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points seront considérées comme égales. On pose

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

On rappelle que la densité des fonctions continues dans H implique que pour tout $f \in H$, on a que $\lim_{n\to\infty} \|S_n(f) - f\| = 0$, et donc que $(e_n, n \in \mathbb{Z})$ est une base hilbertienne de H, où $e_n(x) := e^{inx}$.

Soit A l'espace des fonctions π-périodiques, c'est-à-dire telles que $f(x+\pi) = f(x)$, pour tout x. On pose $A_0 := \{e_{2k}, k \in \mathbb{Z}\}$, $A_1 := \{e_{2k+1}, k \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Montrer que A_0 est un système orthonormé et que $A_0 \subset A$.
(2) Montrer que $A_1 \subset A^{\perp} \subset A_0^{\perp}$.
(3) Montrer que $\overline{\mathrm{Vect} A_0} \subset A_1^{\perp}$. En utilisant le fait que $(e_n, n \in \mathbb{Z})$ est une base hilbertienne de H, montrer que $\overline{\mathrm{Vect} A_0} = A_1^{\perp}$.
(4) Montrer que A est fermé, et en déduire que $A = A_1^{\perp}$.