

TD 2. Transformée de Fourier

On rappelle la définition de la *Transformée de Fourier* d'une fonction f , quand f est absolument intégrable sur \mathbb{R} :

$$\hat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i \xi t} dt.$$

Exercice 1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction absolument intégrable. Montrer que :

- (1) Pour tout $h \in \mathbb{R}$, en posant $g(x) = f(x+h)$, on a $\hat{g}(\xi) = e^{2\pi i h \xi} \hat{f}(\xi)$.
- (2) Pour tout $\delta > 0$, en posant $g(x) = f(\delta x)$, on a $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\delta} \hat{f}\left(\frac{\xi}{\delta}\right)$.
- (3) Pour tout $h \in \mathbb{R}$, en posant $h(x) = e^{-2\pi i h x} f(x)$, on a $\hat{h}(\xi) = \hat{f}(\xi + h)$.
- (4) Si f est dérivable avec dérivée f' absolument intégrable, alors $\widehat{(f')}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$.

Exercice 2. Soit $f_0(x) := \chi_{[-1/2, +1/2]}(x)$ (c'est-à-dire la fonction "porte" : $f(x) = 1$ si $-1/2 \leq x \leq 1/2$, et 0 sinon). Calculer \hat{f}_0 . Cette fonction est-elle absolument intégrable sur \mathbb{R} ?

Exercice 3. Montrer que si g est une fonction en escalier, alors $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{g}(\xi) = 0$.

Exercice 4. Soit f une fonction telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ converge. On suppose de plus que f est paire, à valeurs réelles. Montrer que $\hat{f}(\xi)$ qui est, a priori, un nombre complexe, est en fait réel. (Rappel : si $z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$).

Exercice 5. On pose $f(x) := e^{-|x|}$. On rappelle que pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx} e^{(a+ib)x} = (a+ib)e^{(a+ib)x}$.

- (1) Montrer que $x^k f(x)$ est absolument intégrable sur \mathbb{R} , pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- (2) Montrer par récurrence la propriété générale suivante (P_n) :
Si $x^k g(x)$ est absolument intégrable sur \mathbb{R} , pour $0 \leq k \leq n$, alors $(\hat{g})^{(n)}$ existe et est obtenue en prenant la transformée de Fourier de $x \mapsto (-2\pi i x)^n g(x)$.
- (3) Montrer sans la calculer que $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.
- (4) Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-2\pi i x \xi} dx$.
- (5) En déduire le calcul de $\hat{f}(\xi)$.

Exercice 6. Montrer que les deux espaces de fonctions suivants sont égaux à l'espace de Schwartz

$$\mathcal{S} := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall n, k \in \mathbb{N}, \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^n f^{(k)}(x)| < +\infty \right\}.$$

- (1) $\mathcal{S}_0 := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall n, k \in \mathbb{N}, \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^n f^{(k)}(x) = 0 \right\}$;
- (2) $\mathcal{S}_1 := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall n, k \in \mathbb{N}, \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^n f^{(k)}(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} |x^n f^{(k)}(x)| \text{ converge.} \right\}$.

Exercice 7. Montrer que la famille $(K_\delta)_{\delta > 0}$, où $K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi \frac{x^2}{\delta}}$ est une identité approchée.