Université Paul Sabatier — S4, Année 2019-2020
L2 Spé Math/Phy, Analyse Hilbertienne

TD 1. Séries de Fourier

On rappelle que si f est périodique de periode 2π on a

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

Exercice 1. Tracer rapidement le graphe des fonctions 2π-périodiques suivantes, puis calculer leurs coefficients de Fourier $c_n(f)$.

(1) $f(x) = x$ pour $x \in [0,\pi[$ et f est impaire.
(2) $f(x) = x$ pour $x \in [0,\pi[$ et f est paire.
(3) $f(x) = x^2$ pour $x \in [0,2\pi[$.
(4) $f(x) = \sin x$ pour $x \in [0,\pi[$ et f est paire.
(5) $f(x) = 1$ pour $x \in [0,\pi[$, $f(x) = 0$ pour $x \in [\pi,2\pi[$.

Exercice 2. Calculer $c_n(f)$ pour les fonctions suivantes, qu'on prolongera toujours pour être périodiques de période 2π :

(1) $f(x) = x$ pour $-\pi \le x \le \pi$.
(2) $f(x) = 1$ pour $0 \le x \le \pi$, $f(x) = 0$ pour $\pi < x < 2\pi$.
(3) $f(x) = |x|$ pour $-\pi \le x \le \pi$. Dans ce cas, montrer qu'on peut développer f en série de cosinus. On admet que $S_N(f)(x)$ converge vers $f(x)$ en tout x. En considérant $x = 0$, déduire que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \pi^2/8$, puis que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \pi^2/6$.

Exercice 3. Considérons le *noyau de Dirichlet*, c'est-à-dire pour le polynôme trigonométrique

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$$

défini pour $x \in [-\pi,\pi]$.

(1) Déterminer $\sum_{n=0}^{N} \lambda^n$ et $\sum_{n=-N}^{-1} \lambda^n$
(2) En déduire que $\sum_{n=-N}^{N} \lambda^n = \frac{\lambda^{-N-1/2} - \lambda^{N+1/2}}{\lambda^{-1/2} - \lambda^{1/2}}$.
(3) En posant $\lambda = e^{ix}$ vérifier que

$$D_N(x) = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin(x/2)}$$

(4) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $|D_N(x)| \ge c\frac{|\sin((N+1/2)x)|}{|x|}$.
(5) Montrer que

$$L_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|dx \ge c\int_{\pi}^{N\pi} \frac{|\sin(x)|}{|x|}dx + O(1).$$

(6) Montrer que $L_N \ge c\log N$. [Suggestion : écrire l'intégrale comme une somme $\sum_{k=1}^{N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}$ et utiliser le fait que $\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \ge c\log N$.]

Exercice 4. Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ des fonctions continues et T-périodiques. Montrer que

(1) $f*(g+h) = f*g+f*h$.
(2) $(cf)*g = c(f*g) = f*(cg)$ pour tout $c \in \mathbb{C}$.
(3) $f*g = g*f$.
(4) $(f*g)*h = f*(g*h)$.
(5) $f*g$ est continue.
(6) $c_n(f*g) = c_n(f)c_n(g)$.

Exercice 5. Soit

$$h_N(t) = \frac{1}{A_N}\cos^{2N}\left(\frac{\pi t}{T}\right) \text{ avec } A_N = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^{2N}\left(\frac{\pi t}{T}\right) dt,$$

pour $N \geq 0$. Montrer que h_N est un polynôme trigonométrique et que (h_N) est une unité approchée.

Exercice 6. Soit

$$F_N = \frac{1}{N}\left(D_0 + \cdots D_{N-1}\right).$$

(1) Montrer que $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_N(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(t)dt = 1$.
(2) Montrer que $\displaystyle F_N(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sin\left(\frac{N}{2}x\right)}{\sin(x/2)}\right)^2$.
(3) En déduire que (F_N) est une unité approchée.

Exercice 7. Retrouver

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

comme application de la formule de Parseval pour la fonction $f(x) = x$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$.