

3. Anneaux, Idéaux et leurs propriétés ; Polynômes à coefficients entiers ou rationnels.

Exercice 3.1 Soit A un anneau et I un idéal de A . Montrer que les idéaux de l'anneau quotient A/I sont en bijection avec les idéaux de A contenant I .

Exercice 3.2 Soit K un corps. Montrer que $K[X, Y]$ n'est pas principal. Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal.

Exercice 3.3 Soit K un corps. Montrer que l'anneau $K[x, y, z, w]/(xy - zw)$ est intègre mais pas factoriel. Montrer que la classe de x est un élément irréductible mais pas premier dans le quotient.

Exercice 3.4 Dans un anneau factoriel, les idéaux premiers non nuls minimaux sont principaux.

Exercice 3.5 Soit g un stathme euclidien sur un anneau A . Montrer que :

1. $g(x)$ minimum si et seulement si x inversible,
2. $g(x) = g(y)$ et $x|y$ si et seulement si x et y sont *associés* (c'est à dire que x divise y et y divise x).

Exercice 3.6 Soit A un anneau tel que la fonction $g(x) = 0$ pour tout x dans A est un stathme euclidien. Montrer que A est un corps.

Exercice 3.7

1. Soit $p \neq 2$ un nombre premier. Démontrer que, pour tout $k \geq 0$, on a $(1+p)^{p^k} = 1 + p^{k+1}x$, avec x entier non multiple de p .
2. En déduire que l'élément $1 + p \pmod{p^m}$ du groupe $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^*$ est d'ordre exactement p^{m-1} .

Exercice 3.8 Pour deux espaces topologiques X et Y , on note $\mathcal{C}(X, Y)$ l'ensemble des fonctions continues de X vers Y .

1. Montrer que $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ est un anneau, avec les opérations $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(fg)(x) = f(x)g(x)$, où \mathbb{R} est muni de la topologie euclidienne.
2. Soit X un espace topologique compact. Montrer que les seuls idéaux maximaux de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ sont les idéaux de la forme $\{f | f(a) = 0\}$, où $a \in X$.
3. Montrer que ce n'est pas vrai dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Exercice 3.9 On dit qu'un anneau est local s'il admet un unique idéal maximal.

1. Montrer que un anneau A est local si et seulement si pour tout a, b non inversible dans A , $a + b$ est non inversible dans A . Dans ce cas, l'idéal maximal est l'ensemble de tous les éléments non inversibles.
2. Soit p un nombre premier et A l'anneau des fractions a/b avec a, b dans \mathbb{Z} tels que $\text{pgcd}(b, p) = 1$. Montrer que si $I \subset A$ est un idéal propre, alors $I = (0)$ ou il existe un entier n tel que $I = (p^n)$. Déduire que A est local, en explicitant son idéal maximal.

Exercice 3.10 Calculer (s'ils existent) les corps des fractions des anneaux suivants :

1. $A = \mathbb{Z}[i]$,
2. $A = K[X_1, \dots, X_n]$, avec K un corps,
3. $A = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, pour d dans \mathbb{Z} ,
4. $A = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Exercice 3.11 1. Montrer que si A est un anneau et I un idéal il existe un anneau $B \supset A$ tel que $B^\times = B \setminus IB$ et B est minimal pour ces propriétés.

2. Dédire de 1. que si A est un anneau et I un idéal premier il existe un anneau $B \supset A$ tel que B soit local (cf. l'exercice 9) d'idéal maximal IB , et minimal pour ces propriétés.

3. Si A est un anneau montrer que l'ensemble des diviseurs de zéro de A est un idéal que l'on notera N . Quelle signification peut-on donner à la question 1. lorsque A est intègre et $I = N$? Que peut-on dire en général?

4. Décrire les idéaux de l'anneau B construit à la question 1.

Exercice 3.12 On travaille dans l'anneau des polynômes $\mathbb{Q}[X]$.

1. Déterminer si $P = 3X^3 + 2X^2 + X + 4$ est irréductible.

2. Soit $Q = X^2 - 1$. Trouver deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$.

Exercice 3.13 Déterminer si les polynômes suivants sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$:

$$4X^3 - 3X - \frac{1}{2}; \quad X^6 - 3X^3 + 12X - 3; \quad X^n - 2 \text{ avec } n \geq 1.$$

Exercice 3.14 1. Quels sont les facteurs irréductibles de $X^4 - 1$, de $X^4 + 1$ et de $X^4 + X^2 + 1$, dans $\mathbb{Q}[X]$, dans $\mathbb{R}[X]$, dans $\mathbb{C}[X]$?

2. Soit $a \neq 0$ entier. Montrer que $X^4 + aX^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 3.15 Trouver un polynôme primitif de $\mathbb{Z}[X]$ associé au polynôme $\frac{2}{3}X^2 + 5X + \frac{3}{2}$ de $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 3.16 Déterminer si les polynômes suivants sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$:

1. $P(X) = X^4 - 7X^2 + 3X + 3$.

2. $P(X) = X^6 - 11X^3 + 33X + 22$.

3. $P(X) = \frac{X^p - 1}{X - 1}$ pour p premier.

Exercice 3.17 Soit E un espace vectoriel sur un corps K , et $u : E \rightarrow E$ un endomorphisme. Pour un polynôme $P(X)$ dans $K[X]$, on considère l'endomorphisme $P(u) : E \rightarrow E$. Montrer que, si $P_1(X)$ et $P_2(X)$ sont premiers entre eux, alors

$$\ker(P_1 P_2(u)) = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u)).$$

Exercice 3.18 Dans $\mathbb{Z}[X]$, considérons le polynôme $P(X) = X^4 + 1$. Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ et dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que, pour tout nombre premier p , $\overline{P(X)} = X^4 + \overline{1}$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 3.19 Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?