

Feuille de TD 4

Classification des chaînes de Markov

Exercice 1

Déterminez les classes (ainsi que leur nature) de la chaîne de Markov de matrice de transition donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Même question avec la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

On lance indéfiniment un dé équilibré à 4 faces : $E = \{1, 2, 3, 4\}$, et l'on définit la variable aléatoire X_n comme le maximum des n premiers lancers. On suppose de surcroît que les lancers sont indépendants de l'état initial $X_0 \in E$.

1 - Montrez que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur E , dont on précisera la matrice de transition.

2 - Déterminez les classes de la chaîne.

3 - Calculez le temps moyen mis par la chaîne pour atteindre l'état absorbant.

Exercice 4

On considère dans cet exercice la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. C'est une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et de matrice de transition donnée par

$$P(x, y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x + 1, \\ q & \text{si } y = x - 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

1 - Montrez que la chaîne est irréductible.

2 - Justifiez les égalités suivantes :

$$P^{2n+1}(0, 0) = 0, \quad \text{et} \quad P^{2n}(0, 0) = C_{2n}^n p^n q^n, \quad n \geq 1,$$

et donnez un équivalent de $P^{2n}(0, 0)$ au voisinage de l'infini. On s'aidera de la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.

3 - Déduisez-en que la chaîne est récurrente dans le cas symétrique $p = q = 1/2$, et transitoire lorsque $p \neq q$.

Exercice 5

On considère dans cet exercice une file d'attente à temps discret. Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. intégrable de loi μ sur $\mathbb{N}$, indépendante d'une variable aléatoire entière X_0 . On définit la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$X_{n+1} = X_n - 1_{\{X_n \geq 1\}} + U_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1 - Montrez que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$, et précisez sa matrice de transition P .

2 - Montrez que l'on a la minoration

$$X_n \geq n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n U_k - 1 \right), \quad n \geq 1.$$

3 - En utilisant la loi forte des grands nombres, i.e.

$$\mathbb{P} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^n U_k = \mathbb{E}[U_1] \right) = 1,$$

montrez que si $\mathbb{E}[U_1] > 1$, alors $\mathbb{P}_x(\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = +\infty) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{N}$.

4 - Déduisez-en que la chaîne est transitoire dans le cas $\mathbb{E}[U_1] > 1$.

5 - Montrez que si $\mathbb{E}[U_1] < 1$, alors le point 0 est récurrent.

Exercice 6 (CC2 2009-2010)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$, de matrice de transition P définie pour tout $x \in \mathbb{N}$ par

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{si } y = 0; \\ \frac{x+1}{x+2} & \text{si } y = x+1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1 - Dessinez le graphe de cette chaîne et déduisez-en qu'elle est irréductible.

2 - Soit $T_0 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 0\}$ le temps de retour en 0 de la chaîne. Montrez que la formule suivante est satisfaite :

$$\mathbb{P}_0(T_0 = n) = \frac{1}{n(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}_*. \quad (*)$$

3 - En utilisant (*), démontrez que la chaîne est récurrente.

4 - Déterminez $\mathbb{E}_0[T_0]$ et concluez sur la récurrence nulle ou positive de la chaîne.

Exercice 7 (CC2 2010-2011)

Soit $N \geq 2$ un entier quelconque et considérons $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la chaîne de Markov sur $E = \{0, 1, \dots, N\}$ de matrice de transition P donnée par

$$P(x, y) = C_N^y (\pi_x)^y (1 - \pi_x)^{N-y}, \quad \text{avec} \quad \pi_x = \frac{1 - q^x}{1 - q^N}, \quad x, y \in E,$$

où $q \in]0, 1[$ est un paramètre fixé. On conviendra dans la suite que $0^0 = 1$.

1 - Vérifiez que P est bien une matrice stochastique.

2 - Déterminez les classes de la chaîne ainsi que leur nature (récurrence ou transience).

3 - Montrez que l'identité suivante est satisfaite:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \notin \{0, N\}) = \sum_{x=1}^{N-1} (1 - \pi_x^N - (1 - \pi_x)^N) \mathbb{P}(X_n = x).$$

4 - En posant $a_n = \mathbb{P}(X_n \notin \{0, N\})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, déduisez-en qu'il existe $\beta \in]0, 1[$, dépendant seulement de N , tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $a_{n+1} \leq \beta a_n$.

Indication: on étudiera sur $]0, 1[$ la fonction $u \mapsto 1 - u^N - (1 - u)^N$.

5 - Posons $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \{0, N\}\}$, représentant le temps d'absorption de la chaîne par les états 0 ou N . En utilisant ce qui précède, montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(T > n) \leq a_0 \beta^n.$$

6 - Déduisez-en soigneusement que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. Ce résultat était-il prévisible ?