Introduction à la géométrie symplectique

Victor Alfieri

I - Motivation physique

But : modéliser un syst. mécanique

Données : - X espace (var. diff.)

- TX espace des phases
- $L : TX \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lagrangien
  "énergie"
- $\mathcal{M} = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, X)$ trajectoires
- $\mathcal{M} \to \mathrm{Map}(\mathbb{R}, TX)$
  $M \mapsto TM$
- $S : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$
  $M \mapsto \int L(TM, t)\, dt$
- On dit qu'une trajectoire est solution si $S(M)$ est extrémale : principe de moindre action.

L'espace des trajectoires est donc

$$\mathrm{Crit}(S) = \{ M \mid dS_M = 0 \}$$

↳ on oublie que L dépend du temps.

⇝ $\mathscr{L}L : TX \to T^*X$

$$(x, v) \mapsto d(L|_{T_xX})(v) : w \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} L(x, v + tw).$$

On dit que le syst. vérifie la condition de Legendre si $\mathscr{L}L : TX \xrightarrow{\sim} T^*X$ est un iso.

Or, sur T^*X on a la 1-forme canonique λ, $d\lambda$ est "symplectique"

non-dégénérée

$[\lambda = \sum v_i\, dx_i]$

On définit :

$$H_L : T^*X \xrightarrow{(\mathcal{L}L)^{-1}} TX \xrightarrow{L} \mathbb{R},$$ le **Hamiltonien**

On regarde : $dH \in T^*(T^*X)$, qui correspond par $d\lambda$ à $dH = d\lambda(X_H, -) \in T(T^*X)$.

On dispose du flot (ϕ_t) de X_H, appelé **flot Hamiltonien du système**.

Thm : $\forall M \in \mathcal{M}$, $M \in Crit(S) \iff M$ suit le flot.
L

II – Géométrie symplectique linéaire

Déf. : étant donné un $\mathbb{R}$-ev E, une **forme symplectique** sur E est une forme bilinéaire non-dégénérée et alternée ω.

Déf. : Un **symplectomorphisme** $\varphi : (E, \omega) \to (F, \omega')$ est une application linéaire $\varphi : E \to F$ tq
$\forall x, y \in E$, $\varphi^*\omega'(x,y) := \omega'(\varphi(x), \varphi(y)) = \omega(x,y)$.

Une telle application est injective. Parfois on va demander que ce soit un iso.

Déf. : pour $W \subset V$ un s/s-ev, on dit qu'il est :
- **isotrope** si $W \subset W^\perp$
- **coisotrope** si $W^\perp \subset W$
- **lagrangien** si $W = W^\perp$
- **symplectique** si $W \cap W^\perp = \{0\}$

Prop.: $\forall W$, $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$

Exemple: * $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$

$[-d\lambda =]$ $\sum_i^n dx_i \wedge dy_i$ $\left[\omega_0((x_i, y_i), (x_i', y_i')) = \sum_i x_i y_i' - x_i' y_i\right]$

* Lagrangien $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

Thm: Darboux linéaire

$\forall (V, \omega)$ ev sympl., $\exists \varphi : (V, \omega) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Preuve: Cela revient à trouver une base $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ de V

tq:
- $\omega(u_i, u_j) = \omega(v_i, v_j) = 0$
- $\omega(u_i, v_j) = \delta_{ij}$.

On démontre le résultat par récurrence sur $\dim V$:
- quand $\dim V = 0$, rien à faire
- $\dim V \neq 1$ $\leftarrow$ pas de forme alternée non-dég. en dim. 1.
- $\dim V \geq 2$: on prend $u_1 \in V$ non-nul.

Comme ω est non-dég., $\exists v_1$ tq $\omega(u_1, v_1) = 1$.

On pose $W = \mathrm{Vect}(u_1, v_1)$.

Alors il est symplectique: $W \cap W^{\perp} = \{0\}$

donc $W \oplus W^{\perp} = V$.

En effet, si $x \in W^{\perp}$, $\begin{cases} \omega(u_1, x) = 0 \\ \omega(x, v_1) = 0 \end{cases}$

Or si de plus $x \in W$, $x = \lambda u_1 + \mu v_1$ et

$\begin{cases} \omega(u_1, x) = \mu \\ \omega(x, v_1) = \lambda \end{cases}$

donc $\lambda = \mu = 0$, donc $x = 0$.

Maintenant on applique l'hypothèse de récurrence sur $W^{\perp}$.

On obtient $(u_2, \dots, u_n, v_2, \dots, v_n)$ et $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ convient.

$\square$

III. Géométrie symplectique

Déf.: Une variété symplectique est (M, ω) avec $\omega \in \Omega^2(M)$ alternée, non-dég. et ~~close~~ fermée : $d\omega = 0$.

Déf.: Un Hamiltonien est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ $H : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Déf.: son gradient symplectique est l'unique $X \in TM \times \mathbb{R}$ tq $\forall t$, $\omega(X_t, -) = dH_t$

Déf.: • Un champ de vecteurs est dit Hamiltonien s'il s'écrit ainsi.

• Un flot est dit Hamiltonien s'il provient d'un tel champ

• $H(M)$ l'espace des $\varphi_{|t=1}$ pour φ | isotopies $[\varphi_{|t=0} = id]$ difféo. de M obtenues ainsi. [isotopie hamiltonienne]

↳ symplectomorphismes hamiltoniens

Lemme d'isotopie de Moser :

Soit M $2n$-var. $\mathcal{C}^\infty$, $Q \subset M$ une s/s-var. compacte, $\omega_0, \omega_1 \in \Omega^2(M)$ fermées tq $\forall q \in Q$, $\omega_{0,q} = \omega_{1,q}$ et $\forall q \in Q$, $\omega_{i|T_qM}$ est non-dég.

Alors $\exists\, \mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1$ deux voisinages ouverts de Q
$\exists\, \psi : \mathcal{N}_0 \to \mathcal{N}_1$ difféo. tq $\psi_{|Q} = id$ et $\psi^* \omega_1 = \omega_0$.

Preuve: On pose $\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$ pour $0 \leq t \leq 1$.
On va construire $\mathcal{N}_0 \supset Q$ ouvert et $\sigma \in \Omega^1(\mathcal{N}_0)$ tq $d\sigma = \omega_1 - \omega_0$ et $\sigma_{|T_QM} = 0$.
Quitte à restreindre $\mathcal{N}_0$, on peut supposer que ω_t est non-dég.
Alors $\exists!\, X_t$ tq $\sigma + \omega_t(X_t, -) = 0$ et $X_{t|Q} = 0$.
De plus, on peut supposer que le flot (φ_t) existe pour $t \leq 1$.

On prend $\psi = \varphi_1$ et $\mathcal{N}_1 = \psi(\mathcal{N}_0)$ et cela convient.

On commence par construire $\mathcal{N}_0$, σ

On choisit une métrique Riemanienne sur M. fibré normal à Q

Donc on a $\exp : TM \to M$ qui consiste à suivre une géodésique. On note sa restriction encore $\exp : TQ^\perp \to M$.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\mathcal{U}_\varepsilon = \{(q,v) \in T_Q M \mid |v| < \varepsilon\}$.

Comme Q compact, on peut trouver ε assez petit tq $\exp|_{\mathcal{U}_\varepsilon}$ soit un difféo.

On pose alors $\mathcal{N}_0 = \exp(\mathcal{U}_\varepsilon)$.

On pose $\varphi_t : \mathcal{N}_0 \longrightarrow \mathcal{N}_0$, $\exp(q,v) \longmapsto \exp(q, tv)$

$$\varphi_1 = id \qquad \varphi_0^*(\omega_1 - \omega_0) = 0$$
$$\varphi_{t|Q} = id \qquad \varphi_1^*(\omega_1 - \omega_0) = \omega_1 - \omega_0$$

On pose $X_t = \left(\frac{d}{dt}\varphi_t\right) \circ \varphi_t^{-1}$
$$\mathcal{N}_0 \to T\mathcal{N}_0$$

et $\sigma_t = \varphi_t^*(\iota(X_t)(\omega_1 - \omega_0))$, $\sigma = \int_0^1 \sigma_t \, dt$.

Alors $\frac{d}{dt}\varphi_t^*(\omega_1 - \omega_0) = d\sigma_t$ et $\sigma_{t|Q} = 0$.

Donc $\sigma_{|Q} = 0$ et $d\sigma = \omega_1 - \omega_0$.

$\square$

Thm de Darboux : toute variété symplectique est localement symplectomorphe à $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Preuve : soit $q \in M$ et une carte $\mathcal{U} \ni q$.

On identifie $\mathcal{U} \overset{\varphi}{\xleftarrow{\sim}} \mathbb{R}^{2n}$, avec $\varphi(0) = q$.

On pose $\omega_0 = \varphi^*\omega$ et quitte à composer φ par un chgmt de base dans $\mathbb{R}^{2n}$, par Darboux linéaire, on peut supposer que $\omega_{0,0} = \sum_i dx_i \wedge dy_i$.

Sur $\mathbb{R}^{2n}$, on note ω_1 la forme canonique.

On applique le lemme de Moser à $Q = \{0\}$ et on trouve $\mathcal{N}_0 \ni 0$, $\varphi : \mathcal{N}_0 \to \varphi(\mathcal{N}_0)$ un difféo tq $\varphi^* \omega_1 = \omega_0$ sympl. $\square$

Déf : un lagrangien $L \subset M$ est une sous-variété tq $\forall q \in L$, $T_q L \subset T_q M$ soit un lagrangien.

Ex : • $\underset{\text{section } 0}{X \subset T^* X}$ est un lagrangien.

• si $\dim M = 2$, toute courbe est un lagrangien (et réciproquement).

Déf : On dit que deux lagrangiens L, L' sont transverses si $\forall x \in L \cap L'$, $T_x L \cap T_x L' = \{0\}$
$\iff T_x L \oplus T_x L' = T_x M$.

Thm admis : $\forall L \subset M$ lagrangien (compact), $\exists \mathcal{N}_0$ vois. ouvert de la section nulle dans $T^* L$, $\exists V$ vois. ouvert de L et $\exists \varphi : \mathcal{N}_0 \to V$ un difféo. $\varphi^* \omega = -d\lambda$
forme de Liouville sur $T^* L$

i.e. que l'exemple $\underset{\text{section } 0}{X \subset T^* X}$ est un modèle local.

Thm : $\forall L, L'$, $\exists \varphi$ une isotopie hamiltonienne tq $\varphi(L)$ et L' soient transverses.

Preuve : utilise le thm de Sard (ou plutôt le thm de densité de Smale ?) : $f : X \to Y$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ entre deux variétés de Banach si $\forall x \in X$, $d_x f$ vérifie que son noyau et son conoyau sont de dim. finies (= de Fredholm) alors $\mathrm{Reg}(f)$ est comaigre.