Perturbation homologique et problème de l'unité

Ricardo Campos

Rappels :

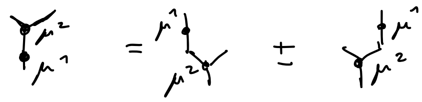
- **A_∞-catégorie non-unitaire (nu)** $\mathcal{A}$:

  $\forall d \geq 1 \;:\; \mu^d : \overset{X_0}{\bullet} \to \overset{X_1}{\bullet} \cdots \bullet \to \overset{X_d}{\bullet} \;\longmapsto\; \overset{X_0}{\bullet} \to \overset{X_d}{\bullet}$

  de degré $2-d$

  tq : $*$ $\mu^1 \circ \mu^1 = 0$

  $*$ $\mu^1 \circ \mu^2(a_2, a_1) = \mu^2(\mu^1(a_2), a_1) \pm \mu^2(a_2, \mu^1(a_1))$

  $\rightsquigarrow$ 

  $*$ ...

$\rightsquigarrow$ $H(\mathcal{A})$ est une catégorie k-linéaire graduée sans identité (= unité)

⚠ Pas de notion d'isomorphisme d'objets : "$f \circ g = id$, $g \circ f = id$"

$\Rightarrow$ pas d'équivalence de catégories.

Plénitude, fidélité, isomorphisme de cat. : ok.

- **Foncteur** $\text{nu-fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \ni \mathcal{F}$: $\mathcal{F} : Ob\,\mathcal{A} \to Ob\,\mathcal{B}$

  et $\forall d \geq 1$, $\mathcal{F}^d : (X_0 \to \cdots \to X_d) \mapsto (\mathcal{F}X_0 \to \mathcal{F}X_d)$

  de degré $1-d$

  tq : ...

+ Il existe une composition entre les foncteurs qui est *associative*.

+ $id \in$ nu-fun$(\mathcal{A}, \mathcal{A})$

+ $\mathcal{F} \in$ nu-fun$(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ tq $\mathcal{F}_{|ob} = id$ est inversible ssi $\mathcal{F}^1$ est un automorphisme (linéaire).

↳ On les appelle "A_∞ - automorphisme".

Déf.: Soit ob $\mathcal{A}$ une collection d'objets et $hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$ des e.v. gradués ($\forall X_0, X_1 \in ob\mathcal{A}$).
Un <u>difféomorphisme formel</u> Φ est une suite $\{\Phi^d\}_{d \geq 1}$ tq Φ^1 est un automorphisme de $hom_{\mathcal{A}}(X, X)$ $\forall X \in ob\mathcal{A}$.

La composition rend les difféo. formels un groupe qui agit sur les structures de A_∞-catégories sur $\mathcal{A}$: étant donnés $\mu_{\mathcal{A}}^{\bullet}$, $\exists!\ \mu_{\tilde{\mathcal{A}}}^{\bullet}$ tq

* $ob\,\tilde{\mathcal{A}} = ob\,\mathcal{A}$
* $hom_{\tilde{\mathcal{A}}}(X_0, X_1) = hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1)$ $\forall X_0, X_1 \in ob\,\tilde{\mathcal{A}} = ob\,\mathcal{A}$
* $\Phi : \mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$ est un A_∞-foncteur.

On écrit $\tilde{\mathcal{A}} = \Phi_* \mathcal{A}$.

Homotopie

Soient $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1 \in$ nu-fun$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ tq $\mathcal{F}_0|ob\mathcal{A} = \mathcal{F}_1|ob\mathcal{A}$.
On pose $\mathcal{D} = \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0 \in hom(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ (càd $\mu^1(\mathcal{D}) = 0$)
avec comme convention $\mathcal{D}^0 = 0$.
On dit que $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_1$ sont <u>homotopes</u> si $\exists\, T \in hom(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ tq $\mu^1(T) = \mathcal{D}$.

transformation <u>pré-naturelle</u> uniquement a priori mais en fait naturelle car $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_1$ A_∞-foncteurs $\Rightarrow \mu^1(\mathcal{D}) = 0$

Rem: Supposons $Ob\, \mathcal{B} = *$.

$$I := C_{cw}(\bullet\!-\!\bullet) = \begin{tikzcd} k u_0 \arrow[rr, bend right, "\partial"'] & \oplus\, k u_1 \arrow[r, bend left, "-\partial"] & \oplus\, k h \end{tikzcd}$$

$$H^\bullet(I) = k(u_0 + u_1).$$

$I \otimes \mathcal{B}$ est une A_∞-cat. :

- $\mu^1_{I\otimes\mathcal{B}}(i \otimes b) = \partial i \otimes b \pm i \otimes \mu^1_{\mathcal{B}}(b)$
- $\forall d \geq 2$, $\mu^d_{I\otimes\mathcal{B}}(i_0 \otimes b_0, \dots, i_{d-1}\otimes b_{d-1}) = i_0 \cdots i_{d-1}\, \mu^d(b_0, \dots, b_{d-1})$

Alors T est une homotopie entre $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_0$ ssi :

$\exists\ \mathcal{G} : \mathcal{A} \longrightarrow I \otimes \mathcal{B}$ A_∞-foncteur

tq $\mathcal{G}(a_0, \dots, a_d) = u_0 \otimes \mathcal{F}_0(a_0, \dots, a_d) + u_1 \otimes \mathcal{F}_1(a_0, \dots, a_d) + h \otimes T(\dots)$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \\ \mathcal{A} \arrow[ur, bend left, "\mathcal{F}_0"] \arrow[r, "\mathcal{G}"] \arrow[dr, bend right, "\mathcal{F}_1"'] & I \otimes \mathcal{B} \arrow[u, "p_0"'] \arrow[d, "p_1"] \\ & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

Lemme: (Perturbation homologique)

Soit $\mathcal{B}$ une A_∞-cat.. Supposons que $\forall X_0, X_1 \in Ob\,\mathcal{B}$ on a un complexe $(hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1), \mu^1_{\mathcal{A}})$.

Supposons des morphismes :

$$\begin{tikzcd} hom_{\mathcal{A}}(X_0, X_1) \arrow[r, bend right, "\mathcal{G}^1"'] & hom_{\mathcal{B}}(X_0, X_1) \arrow[l, bend right, "\mathcal{F}^1"'] \arrow[loop right, "T^1"] \end{tikzcd}$$

où $\deg T^1 = -1$ et $\mathcal{G}^1 \circ \mathcal{F}^1 - id = T^1 \mu^1_{\mathcal{B}} + \mu^1_{\mathcal{B}} T^1$.

Alors $\exists$ A_∞-cat. $\mathcal{A}$ tq $Ob\,\mathcal{A} = Ob\,\mathcal{B}$ tq $\mathcal{F}^1$ et $\mathcal{G}^1$ se relèvent en des A_∞-foncteurs $\mathcal{F}, \mathcal{G}$

et T^1 se relève en une homotopie $G \circ F \underset{T}{\simeq} id$.

<u>Cor</u>: Un quasi-isomorphisme entre A_∞-cat. a un inverse à homotopie près.

<u>Démo</u>:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, shift right, "\wr"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \widetilde{\mathcal{B}} \arrow[d, shift right, "\wr"'] \\
H(\mathcal{B}) \arrow[u, shift right, "\wr"'] \arrow[r, dashed, shift left] & H(\widetilde{\mathcal{B}}) \arrow[u, shift right, "\wr"'] \arrow[l, bend right, shift left]
\end{tikzcd}$$

(les rétractes existent puisque l'on travaille sur un corps)

D'où l'inverse.

A_∞-cat.

A_∞-q.i. $\rightsquigarrow$ A_∞-iso car diff. $= 0$ sur la cohom.

<u>Unité</u>:

<u>Déf.</u>: soit $\mathcal{A}$ A_∞-cat. nu.

- $\mathcal{A}$ est <u>cohomologiquement unitaire</u> (c-unitaire) si $H(\mathcal{A})$ est unitaire.

- $\mathcal{A}$ est <u>strictement unitaire</u> si

  $\forall X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$, $\exists\, e_X \in \hom_{\mathcal{A}}(X, X)$ tq

  $*$ $\mu^1(e_X) = 0$

  $*$ $\mu^2(e_{X_1}, a) = a = \mu^2_{\mathcal{A}}(a, e_{X_0})$ $\quad \forall a : X_0 \to X_1$

  $*$ $\forall d \geq 3$, $\mu^d(\dots, e_X, \dots) = 0$.

- $\mathcal{A}$ est <u>homotopiquement unitaire</u> si

$\forall d \geq 1, i_j \geq 0$, $\mu^{d,(i_d,\dots,i_0)} : \hom(X_{d-1}, X_d) \otimes \dots \otimes \hom(X_0, X_1) \to \hom(X_0, X_d)$

de degré $2-d-2\sum i_k$

qui satisfont : $*$ si $i_0 = \dots = i_d = 0$ $\rightsquigarrow$ conditions normales

$*$ $e_X = \mu^{0,(1)}$, $\mu^2(e_X, a) = a + \mu^1(\mu^{1,(1,0)}(a)) - \mu^{1,(1,0)}(\mu^1(a))$

homotopie pour la relation d'unité

$*$ ...

Lemme : Soit $\mathcal{A}$ c-unitaire. Il existe un difféo. formel Φ tq $\Phi^1 = id_{\mathcal{A}}$ et $\Phi_* \mathcal{A}$ est strictement unitaire.

Déf. : Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ c-unitaires. On note $fun(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ la sous-cat. de $nu\text{-}fun(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ qui préservent l'unité.

$\mathcal{F}$ est une quasi-équivalence si $H^\cdot(\mathcal{F})$ est une équiv. de cat.

Thm : Soit $\mathcal{F} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ une quasi-équiv. Alors il existe $\mathcal{G} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ une quasi-équiv. tq :

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \simeq id_{\mathcal{B}} \quad \text{dans } H^0(fun(\mathcal{B}, \mathcal{B}))$$
$$\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \simeq id_{\mathcal{A}} \quad \text{—} \quad H^0(fun(\mathcal{A}, \mathcal{A}))$$

Idée de démo :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "q.e"] & \mathcal{B} \\
\tilde{\mathcal{A}} \arrow[u] \arrow[r, "q.i.", shift left] & \tilde{\mathcal{B}} \arrow[u] \arrow[l, dashed, shift left]
\end{tikzcd}$$