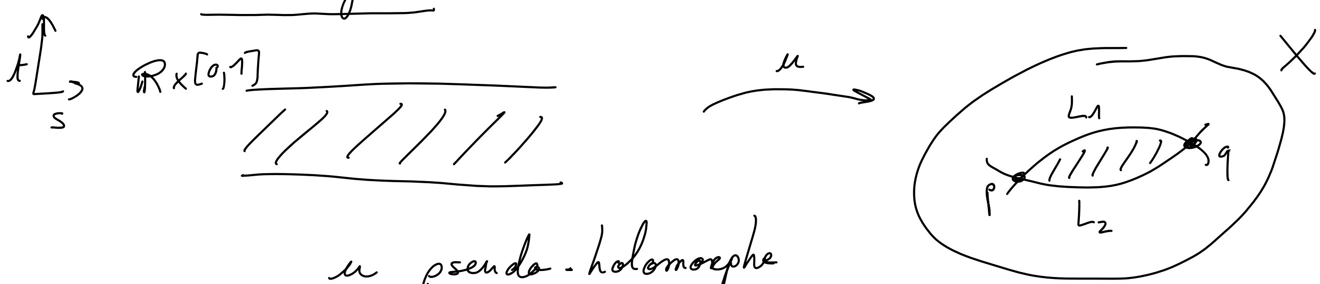
Espaces de Kuranishi et (peut-être) géométrie dérivée

Pelle Steffens

(X, ω, J) variété sympl. et struct. presque complexe compatible.

- On regarde :



u pseudo-holomorphe

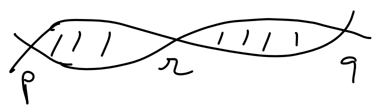
$$(*) \quad \frac{\partial u}{\partial s} + J\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \qquad\qquad \int u^*\omega = E(u) < +\infty$$

$$(**) \quad \lim_{s\to\infty} u(s,t) = q \qquad\qquad [u] \in \pi_2(M, L_1 \cap L_2)$$

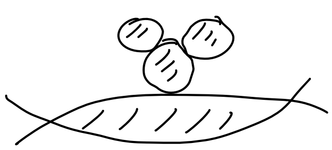
$$\lim_{s\to-\infty} u(s,t) = p$$

- 3 types de dégénerescence

codim 1

① 

$\partial^2 = 0$ "trajectoire breaking" "brisure" ?

② 

courbure "disk bubbling"

Pour éviter ces pb:
- (M,ω,J) exact
- ou $\omega\, \pi_2(M) = 0$
  $\omega\, \pi_2(M, L_i) = 0$

codim 2

③ 

"sphère bubbling"

- Fixons $\beta \in H_2(X;\mathbb{Z})$ tq

$$(*) \quad 3-n \leq c_1(X)\beta < 0$$

$$M_{0,0}(X,\beta,J) =: M$$

$$\operatorname{Vdim}_{\mathbb{R}} M = 2c_1(M)\beta + 2(n-3) \overset{(*)}{\geq} 0$$

Si $\varphi : \mathbb{CP}^1 \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ deg N alors si

$u \in M$ et $N >> 1$, $\quad \operatorname{vdim} \underset{u\circ\varphi}{M_{0,0}(X, N\beta, J)} = \underset{<0}{2c_1 N\beta + 2(n-3)}$

$\Rightarrow M_{0,0}(X,N\beta,J)$ n'est pas une variété lisse.

Déf.: M est semi-positive s'il n'y a pas de β tq $(*)$.

- Pour éviter cette hypothèse :

L'idée [Fukaya-Ono, Arnold conj., GW invariant, '96]

Donner à $M_{0,0}(X,\beta,J)$ la struct. d'un objet C^∞ généralisé avec lequel on peut faire de la géométrie.

"qui admet un fibré tangent"

M var. compacte,

$Y \xrightarrow{p} M$ fibré,

$V \xrightarrow{q} M$ fibré vectoriel,

$P : \Gamma(Y) \to \Gamma(V)$ elliptique.

Thm : Soit $s \in Sol(P) = \{\text{zéros de } P\}$

Si $Coker(T_s P) = 0$ alors $Sol(P)$ est une

P submersion au vois. de s

Var. C^∞ autour de s.

Construction [Kuranishi]

Supposons $Coker(T_s P) \neq 0$, $\quad \Gamma(V) \overset{\exists f_s}{\longleftarrow} Coker(T_s P)$

$\Gamma(V) = Im(T_s P) \oplus coker(T_s P)$

$$P + f_s : \Gamma(Y) \times Coker(T_s P) \longrightarrow \Gamma(V)$$

vérifie $coker(P + f_s) = 0$ en $(s, 0)$ $\quad (\dim ker(T_s P) < \infty)$

$$Z(P + f_s) \hookrightarrow \Gamma(Y) \times Coker(T_s P) \longrightarrow \underset{\dim < \infty}{Coker(T_s P)}$$

g

Alors $Z(P) \cong Z(g)$ autour de s.

(B1) Inventer une struct. C^∞ $\mathcal{E}$ tq si X a une structure $\mathcal{E}$ alors $\exists \{U_i \subseteq X\}$ recouvrement tq $U_i \cong Z(s_i)$ avec $\left\{ \begin{matrix} E_i \\ \downarrow \uparrow s_i \\ M_i \end{matrix} \right\}_i$

(B2) $\mathbb{T}_X \in D(Shv_{vect_{\mathbb{R}}}(X))$ tq $\forall i$ $\mathbb{T}_{X|U_i} \cong [TM_i \xrightarrow{ds_i} TE_i]$

Déf : la cat. des affines de Kuranishi : Aff_{Kur}

(0) $(M, E \to M, s)$

(1) $\begin{matrix} E & \xrightarrow{\bar f} & F \\ s \uparrow \downarrow p & & \downarrow q \uparrow t \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{matrix}$ $\quad \bar f \circ s = t \circ f$.

Pb : le théorème d'inversion locale n'est pas vrai.

$$\Pi_K = TM \xrightarrow{ds} TE \in D(Shv_{Vect_{\mathbb{R}}}(Z(K)))$$

$\times\ (M,\ E \xrightarrow[q]{} M,\ s)$

$\times\ (M \times \mathbb{R}^n,\ E \times \mathbb{R}^n \longrightarrow M \times \mathbb{R}^n,\ s + id_{\mathbb{R}^n})$

la projection $M \times \mathbb{R}^n \to M$ induit des isomorphismes $Z(s) \cong Z(s+id_{\mathbb{R}^n})$, $\Pi_K \cong \Pi_{K \times \mathbb{R}^n}$ mais elle n'est pas inversible

Localisation de Gabriel-Zisman : hAffKur

(ne sera pas suffisant par la suite)

(0) obj. de AffKur

(M) $K_0 \longrightarrow K_1 \xleftarrow{\sim} K_2 \longrightarrow \dots \xleftarrow{\sim} K_n$ dans AffKur

$\hookrightarrow$ $K_0 \longrightarrow K_n$ dans hAffKur

Déf. : une équiv. faible des affines de Kuranishi ($\xleftarrow{\sim}$)

$K \xrightarrow{f} \mathcal{L}$ tq $Z(K) \cong Z(\mathcal{L})$ et $\Pi_K \cong \Pi_{\mathcal{L}} \in D(Shv_{Vect_{\mathbb{R}}}(Z(K)))$

Déf. (pas correcte)

X esp. top. Hausdorff.

Un atlas naïf est donné par

① $\{U_i \subseteq X\}_{i \in I}$

② $\forall i\quad K_i \in hAffKur$

③ $\varphi_i : Z(K_i) \xrightarrow{\simeq} U_i$

④ si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\varphi_{ij} : K_i|_{U_{ij}} \xrightarrow{\cong} K_j|_{U_{ij}}$

tq ⓐ $\varphi_j \circ \varphi_{ij} = \varphi_i$

ⓑ $\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} = \varphi_{ik}$

① $P : \Gamma(Y) \longrightarrow \Gamma(V) \rightsquigarrow \mathrm{Sol}(P)$ (admet une struct. d'atlas naïf (*))

② $\Pi_{\mathrm{Sol}(P)}$ tq $\Pi_{\mathrm{Sol}(P)|U_i} \simeq \Pi_{K_i}$

(localement ok mais pas globalement)

(*) Construction du type la construction de Kuranishi

Atlas pour les faisceaux

$X, \{U_i \subseteq X\}_{i \in I}$

① $J \subseteq I$, $|J| < +\infty$, $\mathcal{F}_J \in \mathrm{Shv}_{\mathrm{Ch}(\mathbb{R})}\left(\bigcap_{i \in J} U_i\right)$

② J, $i \notin J$, $J \cup \{i\}$

$\exists \quad \mathcal{F}_J|U_{J\cup\{i\}} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{F}_{J \cup \{i\}}$

③ J, $i, k \notin J$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}_{J\cup\{i\}}|U_{J\cup\{k\}} \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[d, phantom, "\exists\ \Downarrow"] & \\
\mathcal{F}_J|U_{J\cup\{i,k\}} \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[dr, "\simeq"'] & {} & \mathcal{F}_{J\cup\{i,k\}} \\
 & \mathcal{F}_{J\cup\{k\}}|U_{J\cup\{i\}} \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

TBC