A_∞-catégories triangulées et la catégorie des complexes tordus ($Tw\, \mathcal{A}$)

Michel Vaquié

1. Quelques rappels :

- $\mathcal{A}$ A_∞-cat. nu

$nu\text{-}mod(\mathcal{A}) = nu\text{-}Fun(\mathcal{A}^{op}, Ch(k))$

$\mathcal{Y} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{Q} = nu\text{-}mod(\mathcal{A})$ foncteur de Yoneda

- $\mathcal{M} \in nu\text{-}mod(\mathcal{A})$, $Y \in ob(\mathcal{A})$, $\mathcal{Y} = \mathcal{J}(Y)$

Alors $\lambda = \lambda_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}(Y) \longrightarrow hom_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Y}, \mathcal{M})$

$$\lambda(c)^d(b, a_{d-1}, \dots, a_1) := \mu_{\mathcal{M}}^{d+1}(c, b, a_{d-1}, \dots, a_1)$$

$\in \mathcal{M}(Y)$

- $Ch(k)$ strict^t unitaire $\Rightarrow$ $\mathcal{Q}$ strict^t unitaire

- $\mathcal{A}$ A_∞-cat. c-unitaire

$mod(\mathcal{A}) = Fun(\mathcal{A}^{op}, Ch(k)) \subset nu\text{-}mod(\mathcal{A})$.

À partir de maintenant, toutes les A_∞-cat. sont c-unitaires

<u>Lemme</u> : si $\mathcal{M}$ A_∞-mod. c-unitaire, alors $\lambda_{\mathcal{M}}$ quasi-iso.

2. A_∞-cat. triangulées

<u>Déf.</u> : $\mathcal{M}$ est <u>quasi-représentable</u> s'il existe $Y \in ob(\mathcal{A})$ et

$\exists\, [t] : \mathcal{Y} \to \mathcal{M}$ <u>quasi-iso</u> avec $\mathcal{Y} = \mathcal{J}(Y)$

[Seidel] dit iso dans $H^0(\mathcal{Q})$, i.e.

iso à $\mathrm{im}(\mu^1_{\mathcal{Q}})$ près $\supset$ homotopies $\subset$ quasi-iso

Lemme : $(Y, [t])$ quasi-représente $\mathcal{M}$ ssi

$$\exists\, c \in \mathcal{M}^0(Y) \text{ tq } \mu^1_{\mathcal{M}}(c) = 0 \text{ et } [d(c)] = [t]$$
$$\text{tq } \forall X \quad \hom_{\mathcal{A}}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{M}(X) \text{ quasi-iso}$$
$$b \longmapsto (-1)^{|b|} \mu^1_{\mathcal{M}}(c, b)$$

Constructions dans Q (pas forcément dans $\mathcal{A}$)

1) Somme directe

Y_0 et Y_1 dans $\mathcal{A}$

$$(\mathcal{Y}_0 \oplus \mathcal{Y}_1)(X) := \mathcal{Y}_0(X) \oplus \mathcal{Y}_1(X)$$
$$\mu^d_{\mathcal{Y}_0 \oplus \mathcal{Y}_1} := \mu^d_{\mathcal{Y}_0} \oplus \mu^d_{\mathcal{Y}_1}.$$

2) $(Z, \partial_Z) \in Ch(k)$

$$(Z \otimes \mathcal{Y})(X) := Z \otimes (\mathcal{Y}(X))$$
$$\mu^1_{Z\otimes\mathcal{Y}}(z \otimes b) := \pm \partial_Z(z) \otimes b \pm z \otimes \mu^1_{\mathcal{Y}}(b)$$
$$\mu^d_{Z\otimes\mathcal{Y}}(z \otimes b, a_{d-1}, \dots, a_1) := z \otimes \mu^d_{\mathcal{Y}}(b, a_{d-1}, \dots, a_1)$$

<u>Ex.</u> : $Z = k[\sigma]$

- $k[\sigma] \otimes \mathcal{M} =: SS^\sigma \mathcal{M}$
- si $\mathcal{M} = \mathcal{Y}$, alors $k[\sigma] \otimes Y =: S^\sigma Y$ (s'il existe $k[\sigma]\otimes Y \in \mathcal{A}$ qui quasi-représente $SS^\sigma \mathcal{Y}$).

3) Cône

Y_0 et Y_1 dans $\mathcal{A}$

$c \in \hom^0_{\mathcal{A}}(Y_0, Y_1)$, $\mu^1(c) = 0$

$\mathcal{C} = (\text{Cône}(c)) \in Q$ est défini par :

$$\left|\begin{array}{l} \mathcal{E}(X) := \hom_{\mathcal{A}}(X, Y_0)[1] \oplus \hom_{\mathcal{A}}(X, Y_1) \\ \mu^d_{\mathcal{E}}((b_0, b_1), a_{d-1}, \dots, a_1) := \\ \qquad \left(\mu^d_{\mathcal{A}}(b_0, a_{d-1}, \dots, a_1), \mu^d_{\mathcal{A}}(b_1, a_{d-1}, \dots, a_1) + \mu^{d+1}_{\mathcal{A}}(c, b_0, a_{d-1}, \dots, a_1)\right) \end{array}\right.$$

Triangle exact

Yoneda embedding

Le cône $\mathcal{E} = \text{Cône}(c)$ fournit un triangle

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Y}_0 \arrow[rr, "(\mathcal{Y}^1(c))"] & & \mathcal{Y}_1 \arrow[dl, "(i)"] \\ & \mathcal{E} \arrow[ul, "(\pi)", "{[1]}"'] & \end{tikzcd} \qquad (**)$$

$i : b_1 \longmapsto (0, b_1)$

$\pi : (b_0, b_1) \longmapsto b_0$

représentants de l'identité de $H(\mathcal{A})$

Lemme :
$$\left.\begin{array}{l} \tilde{i}^d(b, a_{d-1}, \dots, a_1) := (0, \mu^{d+1}_{\mathcal{A}}(e_{Y_1}, b, a_{d-1}, \dots)) \\ \tilde{\pi}^d((b_0, b_1), a_{d-1} \dots) := -\mu^{d+1}_{\mathcal{A}}(e_{Y_0}, b, a_{d-1}, \dots) \end{array}\right\} \text{cohomologues à } i \text{ et } \pi.$$

Déf. : Un *triangle exact* dans $H(\mathcal{A})$ est un diagramme

$$\begin{tikzcd} Y_0 \arrow[rr, "c_1"] & & Y_1 \arrow[dl, "c_2"] \\ & Y_2 \arrow[ul, "c_3", "{[1]}"'] & \end{tikzcd} \qquad (*)$$

qui est iso dans $H(\mathcal{A})$ à un triangle $(**)$ par le plongement de Yoneda.

Lemme : Un triangle $(*)$ est exact ssi

$$\exists \left| \begin{array}{l} h_1 \in \hom^0_{\mathcal{A}}(Y_1, Y_0) \\ h_2 \in \hom^0_{\mathcal{A}}(Y_2, Y_1) \\ h_3 \in \hom^0_{\mathcal{A}}(Y_1, Y_2) \end{array}\right.$$

avec $\mu^1_{\mathcal{A}}(h_1) = \mu^2_{\mathcal{A}}(c_3, c_2)$, $\mu^1_{\mathcal{A}}(h_2) = -\mu^2_{\mathcal{A}}(c_1, c_3)$

et $\mu^1_{\mathcal{A}}(h_3) = -\mu^2_{\mathcal{A}}(c_1, h_1) + \mu^2_{\mathcal{A}}(h_2, c_2) + \mu^3_{\mathcal{A}}(c_1, c_2, c_3) - e_{Y_1}$

$\llcorner$ avec une condition supplémentaire.

Notons $\mathcal{D}$ l'A_∞-cat. strict^t unitaire avec

3 obj. Z_0, Z_1, Z_2

$\hom_{\mathcal{D}}(Z_k, Z_k) := k\, e_{Z_k}$

$\hom_{\mathcal{D}}(Z_0, Z_1) := k\, x_1$, $|x_1| = 0$

$\hom_{\mathcal{D}}(Z_1, Z_2) := k\, x_2$, $|x_2| = 0$

$\hom_{\mathcal{D}}(Z_2, Z_0) := k\, x_3$, $|x_3| = 1$

$\mu^3(x_3, x_2, x_1) = e_{Z_0}$, $\mu^3(x_1, x_3, x_2) = e_{Z_1}$, $\mu^3(x_2, x_1, x_3) = e_{Z_2}$

(les autres hom ou compositions sont nuls).

Prop.: Un triangle $(*)$ dans $H(\mathcal{A})$ est exact ssi

$\exists\, \mathcal{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{A}$ avec $\left|\begin{array}{l} \mathcal{F}(Z_k) = Y_k \\ [\mathcal{F}^1(x_k)] = [c_k] \text{ dans } H(\mathcal{A}) \end{array}\right.$

Corollaire: $\mathcal{F} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ A_∞-foncteur.

Alors l'image par $H(\mathcal{F})$ d'un triangle exact est un triangle exact.

Déf.: $\mathcal{A}$ A_∞-cat. c-unitaire.

$\mathcal{A}$ est triangulée si

- $ob(\mathcal{A}) \neq \emptyset$
- $\forall\, Y$, $\exists\, \tilde{Y}$ tq $S\tilde{Y} = Y$ dans $H(\mathcal{A})$
- $\forall\, [c] \in H^0(\mathcal{A})$, $[c]$ peut être complété en un

triangle exact. $\Rightarrow \forall Y,\ SY$ existe

Prop. : • $\mathcal{A}$ est un A_∞-cat. triangulée.
Alors $H^0(\mathcal{A})$ est une cat. triangulée au sens classique.
• $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ A_∞-foncteur entre A_∞-cat. triang.
Alors $H^0(F)$ est exact.

Déf. : $\mathcal{A}$ A_∞-cat.
Enveloppe triangulée
$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ cohom. pleinement fidèle
avec $\mathcal{B}$ A_∞-cat. triang. tq $F(\mathcal{A})$ engendre $\mathcal{B}$
i.e. $\mathcal{B}$ est la plus petite sous-cat. triang. de $\mathcal{B}$ contenant $\mathcal{A}$.

$Q = \mathrm{mod}(\mathcal{A})$ est une cat. triang.
$\hookrightarrow$ La sous-cat. triang. eng. par $\mathcal{Y}(\mathcal{A})$ est une enveloppe triangulée de $\mathcal{A}$.

3. $Tw(\mathcal{A})$ pour $\mathcal{A}$ A_∞-cat.

ens. fini · obj. de $\mathcal{A}$ · dans gR_k de dim. finie · $\nwarrow$ k-mod. gradués

$\Sigma\mathcal{A}$ • $ob(\Sigma\mathcal{A}) := \{ (I, \{X^i\}_{i\in I}, \{V^i\}_{i\in I}) \}$
$= \{ \bigoplus_{i\in I} V^i \otimes X^i \}$

• $\hom_{\Sigma\mathcal{A}} \left(\bigoplus_{I_0} V_0^i \otimes X_0^i, \bigoplus_{I_1} V_1^j \otimes X_1^j \right)$

$$:= \left\{ (a^{ji}) \ , \quad a^{ji} = \sum_k \phi^{kji} \otimes x^{kji} \right\}$$

$\phi^{kji} \in \hom_{gr_k}(V_0^i, V_1^j)$ $\qquad x^{kji} \in \hom_{\mathcal{A}}(X_0^i, X_1^j)$

$$\bullet \ \mu^d_{\Sigma\mathcal{A}}(a_d, \dots, a_1)^{i_d, i_0} := \sum \pm \phi_d^{i_d i_{d-1}} \cdots \phi_1^{i_1 i_0} \otimes \mu^d_{\mathcal{A}}(x_d^{i_d i_{d-1}}, \dots, x_1^{i_1 i_0}).$$

Rem: On peut identifier $\mathcal{A}$ à une sous-cat. pleine de $\Sigma\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = ((*, X, k)).$$

Un complexe pré-tordu : (X, δ_X), $X \in \Sigma\mathcal{A}$

$\delta_X \in \hom^1_{\Sigma\mathcal{A}}(X, X)$

$$X = \bigoplus V^i \otimes X^i \in \Sigma\mathcal{A}$$

Un sous-complexe $\tilde{X}$ est

$$\tilde{X} := \bigoplus \tilde{V}^i \otimes X^i \ \text{tq} \ \tilde{V}^i \subset V^i.$$

On peut alors définir $X/\tilde{X} := \bigoplus V^i/\tilde{V}^i \otimes X^i$.

(X, δ_X) est un complexe tordu si

- $\exists$ filtration décroissante de X préservée par δ_X

$$X = F^0 X \supset F^1 X \supset \dots \supset F^m X = 0$$

tq $\delta_X |_{F^k X / F^{k+1} X} = 0$.

- $\sum \mu^n_{\Sigma\mathcal{A}}(\delta_X, \dots, \delta_X) = 0$. [$\delta_X \in \hom^1_{\Sigma\mathcal{A}}(X, X)$ élément de Maurer-Cartan de l'alg. A_∞ $\hom^1_{\Sigma\mathcal{A}}(X, X)$]

Les complexes tordus forment une A_∞-cat. $Tw(\mathcal{A})$.

$$\hom_{Tw(\mathcal{A})}\left((X_0,\delta_{X_0}),(X_1,\delta_{X_1})\right) = \hom_{\Sigma\mathcal{A}}(X_0,X_1).$$

$$\mu^d_{Tw\,\mathcal{A}}(a_d,\dots,a_1) = \sum \mu_{\Sigma\mathcal{A}}^{d+i_1+\dots+i_d}(\overbrace{\delta_{X_d},\dots,\delta_{X_d}}^{i_d}, a_d, \delta_{X_{d-1}},\dots,\overbrace{\delta_{X_0}}^{i_0})$$

<u>Lemme</u>: Si: $\mathcal{G}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, alors $Tw\,\mathcal{G}: Tw\,\mathcal{A}\to Tw\,\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{A}$ strict^t unitaire / c-unitaire, alors $Tw\,\mathcal{A}$ strict^t unitaire / c-unitaire.

On peut vérifier que $Tw\,\mathcal{A}$ contient les sommes d'objets, le produit tensoriel par un $\mathbb{Z}$ gradué et les cônes. Ainsi:

<u>Prop.</u>: $Tw\,\mathcal{A}$ est une A_∞-cat. triangulée.

Si $\mathcal{F}:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, alors $Tw\,\mathcal{F}: Tw\,\mathcal{A}\to Tw\,\mathcal{B}$ vérifie :

- $Tw\,\mathcal{F}$ respecte S
- $Tw\,\mathcal{F}(\text{Cône}(c)) = \text{Cône}(Tw\,\mathcal{F}^1(c))$.
- $H(Tw\,\mathcal{F}): H(Tw\,\mathcal{A})\to H(Tw\,\mathcal{B})$ envoie triangle exact sur triangle exact.

$\Leftrightarrow$ $H^0(\mathcal{F})$ foncteur exact de cat. triangulée

<u>Lemme</u>: Un triangle dans $H(\mathcal{A})$ est exact ssi son image dans $H(Tw\,\mathcal{A})$ est exact (à travers $\mathcal{A}\hookrightarrow Tw\,\mathcal{A}$)

<u>Prop.</u>: $Tw\,\mathcal{A}$ est une enveloppe triangulée de $\mathcal{A}$.