

Concainement ? Le cylindre et le tore

(Groupe de travail sur les cat. de Fukaya)

Introduction

Pour aujourd'hui, nous avons deux buts :

1. Décrire des complexes de Floer, à travers l'exemple du cylindre.
2. Comprendre l'intérêt des constructions algébriques faites dans la première partie du groupe de travail (sur les A_∞ -catégories) dans le cas du tore.

⚠ Avertissement

- * Le tore n'est pas une variété symplectique exacte donc on ne peut pas appliquer l'exposé précédent directement.
- * On va étudier des lagrangiennes qui ne sont pas exactes dans le contexte du cylindre et voir les problèmes que ça peut créer (les problématiques seraient analogues sur le tore).

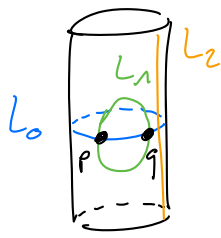
1. Les complexes de Floer pour le cylindre

$$M = T^*S^1 = S^1 \times \mathbb{R}, \quad \omega = d\theta, \quad dh = d(-hd\theta)$$

est exacte.

$$c_1(\mathbb{T}n) = 0.$$

a. Les objets : sous-variétés lagrangiennes



$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{L_0} = \\ \mu_{L_1} = ? \\ \mu_{L_2} = \end{array} \right.$$

↳ L_1 ne fait pas partie des objets car $(L_1, \omega|_{L_1})$ n'est pas exacte (elle borde un disque d'aire symplectique non nulle), $\mu_{L_1} \neq 0$?

• L_2 non plus car L_2 non fermée [pourrait créer un nb inf de pts d'it]

Les seules sous-var. lagrangiennes exactes et compactes (et d'indice de Maslov nul) sont les déformations Hamiltoniennes de la section nulle



↳ ce sont plutôt les courbes t_q
 ← les aires se compensent (⇔ exacte) mais ça correspond peut-être

Rappel : motivation historique : la conjecture d'Arnold

Thm [Floer] Supposons $\forall D \subset \Pi$ disque $t_q \partial D = L$, on

a $A(D) = 0$ (aire symplectique).

Alors si $L \cap \Psi(L)$, on a $|L \cap \Psi(L)| \geq \sum_i \dim H^i(L, \mathbb{Z}/2)$
 ↑ difféo. Hamiltonien

* Comme $A(\bigcirc^{L_1}) \neq 0$, on ne cherche pas à démontrer quelque chose pour L_1 .

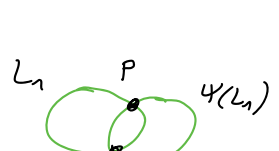

Dans ce cas, la conjecture est fautive puisqu'il existe $\Psi t_q \bigcirc^{L_1} \bigcirc^{\Psi(L_1)}$ soit disjoint donc $|L_1 \cap \Psi(L_1)| = 0 < 2$.

- * L_2 pourrait sûrement être inclus en ajoutant des conditions de bord.
- * L_0 vérifie les hypothèses de l'énoncé puisqu'il n'existe pas de disque dont le bord est L_0 ; elle vérifie le résultat.

b. Les complexes de morphismes

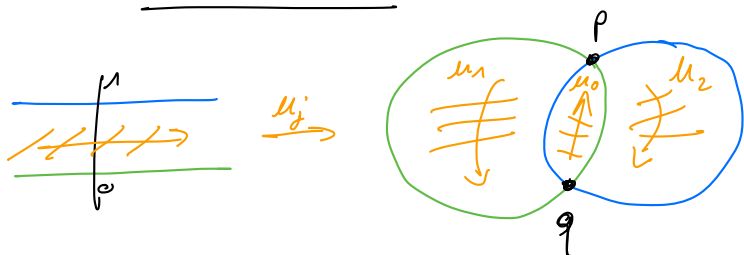
Nous allons chercher à calculer les complexes de Floer même dans ~~les cas non prévus~~ pour voir les problèmes.

* $CF(L_1, L_1) = CF(L_1, \psi(L_1)) = 0$ si $L_1 \cap \psi(L_1) = \emptyset$

Mais si  alors 

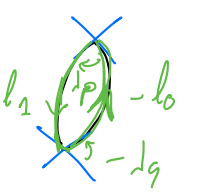
$CF(L_1, \psi(L_1)) = (\Lambda \cdot p[-1] \oplus \Lambda \cdot q[-1], \partial)$ [coeff. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$]

Calculons ∂ :  (coeff. dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)



Indices de Maslov:

$\hookrightarrow \mu_{\mu_0} = 1$

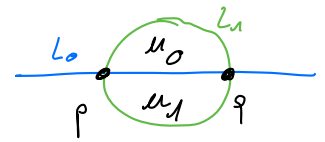
De même, $\mu_{\mu_1} = 1 = \mu_{\mu_2}$.  ($-l_0, l_q, l_1, -l_p$)

On peut aussi calculer $\mu_{\mu_0 \# \mu_1} = 2$.

Finalement: $\partial q = T^{A(\mu_0)} p$ et $\partial p = T^{A(\mu_1)} q + T^{A(\mu_2)} q = 2 T^{A(\mu_1)} q = 0$

\hookrightarrow On trouve la bonne cohomologie. (avec les coeff. dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

* $CF(L_0, L_1) = \Lambda. p[-] \oplus \Lambda. q[-]$



$$\begin{cases} \partial p = T^{\mu_1} q \\ \partial q = T^{\mu_0} p \end{cases}$$

(les indices de Maslov ne changent pas)

Alors $\partial^2 \neq 0$.

III Pourquoi: la démonstration de $\partial^2 = 0$ ne fonctionne pas?

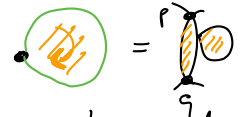
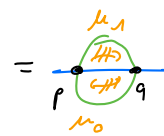
On utilise que $\begin{matrix} p \\ | \\ q \\ | \\ p \end{matrix}$ fait parti d'un bord formé d'autres



Mais ici



$= \mu_1 \# \mu_0 =$

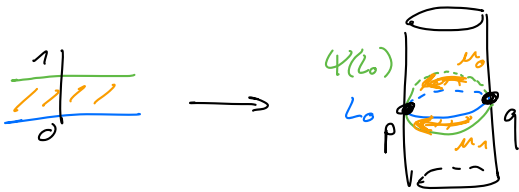


on peut montrer que toute bande d'indice de Maslov 2 est de ce type
 \nearrow n'apparaît pas dans ∂^2

Rem.: Ce problème peut apparaître car L_1 borde un disque d'aire symplectique non nulle.

$[\omega \cdot \pi_2(M, L_1) \neq 0 \text{ ou } L_1 \text{ n'est pas exacte}]$

* $CF(L_0, \Psi(L_0)) = \Lambda. p[-] \oplus \Lambda. q[-]$



$\mu_{\mu_0} = 1 = \mu_{\mu_1}$

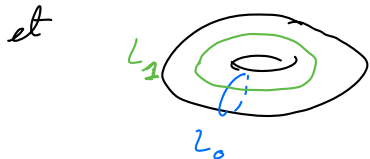
$\partial p = 0, \partial q = T^{\mu_0} (p - p) = 0 \rightsquigarrow CF(L_0, \Psi(L_0)) = H^*(S^1) = H^*(L_0)$

2. Générateurs de la catégorie de Fukaya du tore

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1, \quad \omega = d\theta_1 \wedge d\theta_2$$

n'est pas exacte

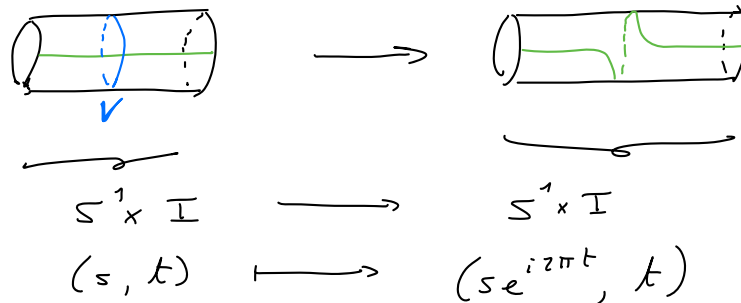
Mais $c_1(TM) = 0$.



$$\begin{cases} \omega \cdot \pi_2(\mathbb{T}, L_0) = 0 \\ \omega \cdot \pi_2(\mathbb{T}, L_1) = 0 \end{cases}$$

a - Twist de Dehn (topologique) \downarrow surface fermée, orientable
 $\tau_V : S \rightarrow S$ homéo
 \uparrow courbe simple fermée

Sur un voisinage tubulaire de V , la courbe se déforme de la façon suivante :



En dehors du voisinage tubulaire, τ_V est l'identité.
 [peut s'étendre à V sphère lagrangienne]

Le twist de Dehn apparaît dans une suite exacte longue de cohom.:

Thm [Seidel] Étant donné une sphère lagrangienne V et deux sous-variétés lagrangiennes L_0 et L_1 de $Fuk(M, \omega)$,

il y a une suite exacte longue en cohomologie de Floer
 $\dots \rightarrow HF^*(V, L_0) \otimes HF^*(L_1, V) \xrightarrow{\mu^2} HF^*(L_1, L_0) \rightarrow HF^*(L_1, Tw(L_0)) \xrightarrow{[\cdot]} \dots$
 dans laquelle le twist de Dehn apparait.

b. Twist algébrique

Rappel (Michel) Complexes tordus (dans $Fuk(M, \omega)$):

$$(X = \bigoplus_{i \in \mathbb{I}} V^i \otimes L^i, \delta_X)$$

\uparrow esp. vect. \uparrow Lagrangienne \leftarrow endom. de X de degré 1

\hookrightarrow Cat. $Tw(Fuk(\pi, \omega))$: enveloppe triangulée de $Fuk(\pi, \omega)$.

Rem.: on aurait pu considérer des pré-faisceaux sur $Fuk(\pi, \omega)$.

L Pourquoi ce modèle avec les complexes tordus?

Les définitions suivantes sont valables dans une A_∞ -cat. mais on les regarde dans $Fuk(\pi, \omega)$.

Étant donné $L \in Fuk(\pi, \omega)$ et $\mathcal{M} \in mod(Fuk(\pi, \omega))$, on a le morphisme d'évaluation

$$\phi: \mathcal{M}(L) \otimes \gamma_L \longrightarrow \mathcal{M}, \text{ où } \gamma_L = \text{Hom}_{Fuk(\pi, \omega)}(-, L)$$

de A_∞ -modules.

$$[\mathcal{M}(L) \otimes \text{Hom}(L_1, L) \xrightarrow{\mu^2} \mathcal{M}(L_1), \dots, \phi^d = \mu^{\frac{d+1}{2}}]$$

Déf.: Twist abstrait de \mathcal{M} le long de L_0 :

$$\mathcal{T}_L(\mathcal{M}) := \text{cône}(\phi) \quad \left[\begin{array}{c} \mathcal{M}(L) \otimes \gamma_L \xrightarrow{\mu^2} \mathcal{M} \\ \swarrow \mathcal{T}_L(\mathcal{M}) \searrow \end{array} \right]$$

Rem.: pour $\mathcal{L} = \mathcal{Y}_{L_0}$, on obtient

$$T_L(\mathcal{Y}_{L_0}) = \text{c\^one} \left(\text{Hom}_{\text{Fuk}(\pi, \omega)}(L, L_0) \otimes \text{Hom}_{\text{Fuk}(\pi, \omega)}(L_1, L) \xrightarrow{\mu^2} \text{Hom}_{\text{Fuk}(\pi, \omega)}(L_1, L_0) \right),$$

ce qui fait bien entendre penser à la suite exacte longue de Seidel.

Lorsqu'il existe une lagrangienne qui quasi-représente $T_L(\mathcal{Y}_{L_0})$, on la note $T_L(L_0)$: twist algébrique

Thm [Seidel] Dans $H^0(\text{Tw}(\text{Fuk}(\pi, \omega)))$, $T_L(L_0) \cong T_L(L_0)$.

L twist algébrique \uparrow \uparrow twist de Dehn

Rem.: La somme connexe de lagrangiennes peut aussi être vue comme un cône (modulo des calculs qui ne sont pas faits en entier).

c - Générateurs

Prop. [Abouzaid - Smith]

Une méridienne et une longitude engendrent l'enveloppe Kazembienne $\Pi(\text{Tw}(\text{Fuk}(\mathbb{T}^2, \omega)))$.



On a $\mathcal{N}Eg(\mathbb{T}^2) = \text{SL}_2(\mathbb{Z}) = \langle \alpha_1, \alpha_2; \alpha_1^4 = 1, \alpha_1^2 = (\alpha_1 \alpha_2)^3 \rangle$

avec $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tq $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et α_2 représentent les twists de Dehn T_{L_0} et T_{L_1} .

On peut calculer que $(\tau_{L_0} \tau_{L_1})^{6k}(L) \cong L \quad \forall$ lagrangienne L .

- En utilisant que le twist topologique coïncide avec le twist algébrique \otimes , on obtient

$$(L \xrightarrow{\phi} (\tau_{L_0} \tau_{L_1})^{6k}(L) \cong L) =: \mathcal{E} \in \text{HF}^0(L, L)$$

↑ le twist abstrait est un cône

On a (par \otimes) que $\text{cône}(\phi) \in \langle L_0, L_1 \rangle \subset \text{Tw}(\text{Fuk}(\mathbb{T}^2, \omega))$.

$\otimes \mathcal{J}_{L_0}(\gamma_i) = \text{hom}(L_0, L) \otimes \text{hom}(L_1, L_0)[1] \oplus \text{hom}(L_1, L) \in$ image par Yoneda de $\text{hom}(L_0, L) \otimes L_0[1] \oplus L$.

- On admet que pour $k=2$, $L \rightarrow (\tau_{L_0} \tau_{L_1})^{12}(L)$ s'annule (i.e. c'est un point d'intersection qui est un bord).

Alors $\text{cône}(\phi) \cong L[1] \oplus L$ et ainsi L est dans la clôture triangulée karoubienne engendrée par L_0 et L_1 .

↳ Finalement $\Pi(\text{Tw}(\text{Fuk}(\mathbb{T}^2, \omega))) \cong \langle L_0, L_1 \rangle^{\text{Fuk}}$. \square