

Transversalité, compacité et recollement (partie 1)

Jean-François Barraud

Ingédients "vitaux" pour extraire des courbes pseudo-holomorphes:

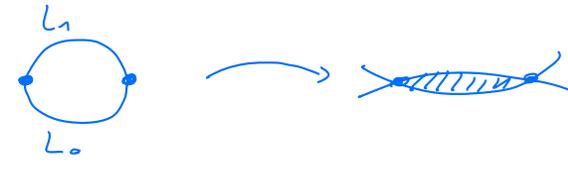
- Transversalité
- Compacité
- Recollement

$$\partial \overline{\mathcal{M}}(x, y) = \bigcup_{z} \overline{\mathcal{M}}(x, z) \times \overline{\mathcal{M}}(z, y)$$

Transversalité

(M, ω) , $\mathcal{J} = \{ \text{stand. p. complexes calibrés par } \omega \}$
 ($\omega(x, Jx)$ métrique)

On s'intéresse à des applications :

$$u: (\mathbb{D}, \partial \mathbb{D}) \xrightarrow{c^{k, a}} (M, L) \quad \text{avec } [u] = A \in H_2(\pi, \mathbb{Z})$$


ou $u: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \pi$, $[u] = A \in H(\pi, \mathbb{Z})$ [cas où il n'y a pas de lagrangienne]

On note $\Sigma = \mathbb{D}$ ou $\mathbb{C}P^1$.

On note \mathcal{U} l'espace de telles applications.

Pour $J \in \mathcal{J}$, on regarde :

$$du + J(u) du \cdot i = 0 \quad (du \cdot i = J(u) \cdot du : u \text{ "presque" holomorphe})$$

$$\Phi_J(u) \in \Gamma(\Lambda^{0,1} \Sigma \otimes u^* T\pi)$$

$$\mathcal{M}_J(A) := \Phi_J^{-1}(0)$$

But: garantie que les $\mathcal{M}_J(A)$ soient coupés transversalement

(i.e. Φ_J submersion en tout point)

↳ $\text{im } \Phi_J$ et $\{0\}$ sont transverses

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\Gamma} & \Gamma(\Lambda^{0,1} \Sigma \otimes u^* T\pi) \\ \downarrow & \searrow & \uparrow \\ \mathcal{U} & & \Phi_J \end{array}$$

Rappel: Thm de Sard-Smale

$$\Lambda \times X \xrightarrow{\Phi} Y \supset \{0\}$$

$$\mathcal{M}_\lambda = \Phi_\lambda^{-1}(\{0\})$$

Si Φ est \mathcal{A} à $\{0\}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ est Fredholm d'indice k et

Φ est C^{k+1} , alors pour un choix générique $\lambda \in \Lambda$,

Φ_λ est \mathcal{A} à $\{0\}$.

Notre contexte:

$$\begin{array}{ccc} F & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \mathcal{J} \times \mathcal{U} & & \Phi \end{array}$$

$$\Phi(\mathcal{J}, u) = du + \mathcal{J}(u) du_i$$

Q1: " $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ " est Fredholm ?

Q2: Φ est \mathcal{A} à 0.

R1: (\mathcal{J}, u) fixé (tg $\Phi(\mathcal{J}, u) = 0$) $\frac{\partial \Phi(\mathcal{J}, u)}{\partial x}$

$$D_{(\mathcal{J}, u)} \Phi(\mathcal{J}, u) = \underbrace{\mathcal{J} du}_i + D u_i \quad ((\mathcal{J}, u) \in T_{(\mathcal{J}, u)} \mathcal{U})$$

$$D u_i = \bar{D} u_i + a u_i$$

↳ \mathbb{R} -linéaire

↳ D a le même symbole principal que \bar{D} .

Donc il est Fredholm de même indice que \bar{D} .

Par le théorème de Riemann-Roch :

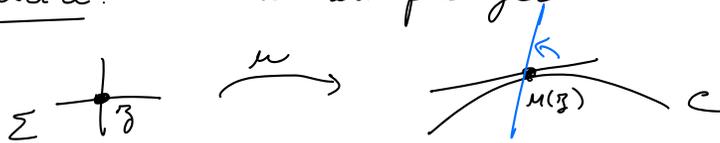
$$\left| \begin{array}{l} \text{Ind}_{\mathbb{R}} D = 2(c_1(A) + n) \quad (\Sigma = \mathbb{C}P^1) \\ \text{Ind}_{\mathbb{R}} D = \mu(A) + n \quad (\Sigma = \mathbb{D}) \end{array} \right.$$

R2 $\phi \neq \{0\}$?

On se donne $\alpha \in \Gamma(\Lambda^{0,1} \Sigma \otimes u^* T\mathcal{M})$.

On cherche (\dot{J}, i) tq $\dot{J} du i + D i = \alpha$.

* Cas facile: si u est plongée



du définit un isomorphisme entre $T\Sigma$ et TC .

On prend $i = 0$ et $\dot{J} du i = \alpha$ impose $\dot{J}: TC \rightarrow T\mathcal{M}|_C$.

On peut étendre à $T\mathcal{M}|_C \rightarrow T\mathcal{M}|_C$, puis $T\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$.

* Cas intermédiaire: si u est "simple" (presque partout injective).



On résout $D i = \alpha$ au voisinage de chaque z_j (on peut : noyau de Poisson).

On recolle arbitrairement ces solutions locales $\rightsquigarrow i$

On résout $\int du_i = \underbrace{\alpha - Du}_\alpha$

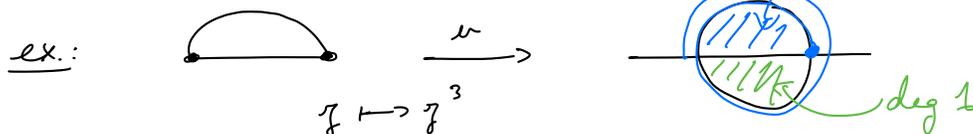
avec α' qui s'annule au voisinage des singularités.
(ce que l'on sait résoudre)

* Cas problématique: u non simple

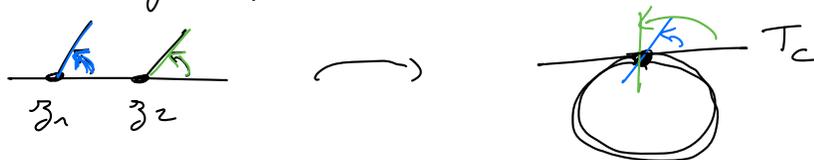
$$\begin{array}{ccc} \bullet \Sigma = \mathbb{C}P^1 & \circ & \xrightarrow{u} \Pi \\ & \downarrow \varphi & \nearrow v \\ & \circ & \end{array}$$

$\exists \varphi$ revêtement ramifié, v simple tq $u = v \circ \varphi$.

• $\Sigma = \mathbb{D}$: plus compliqué!

ex.: 

La stratégie précédente échoue!



De fait, on s'attend à ce que ces courbes soient des pts singuliers des espaces de modules.

Souhait: les courbes multiples devraient avoir une codimension ≥ 2 dans les courbes simples.

Ceci se traduit par $c_1(\mathcal{B}) > 0$

$$[Lu] = A, [v] = B, A = dB$$

$$\leadsto c_1(\mathcal{B}) + (n-3) \stackrel{?}{<} c_1(\mathcal{A}) + (n-3) = dc_1(\mathcal{B}) + (n-3) \quad]$$

On a un problème s'il existe des courbes holomorphes dans des classes B avec $c_1(B) \leq 0$.

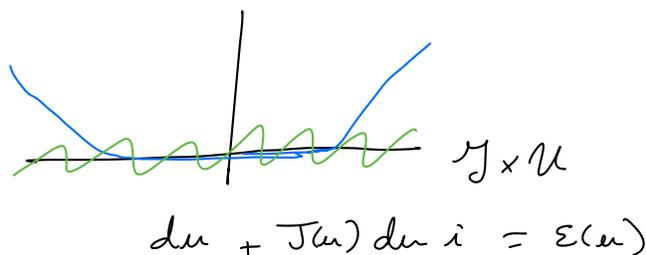
Si $3-m \leq c_1(B) < 0$, pour $d \gg 1$,
 $c_1(A) = dc_1(B)$, $c_1(A) + m - 3 < 0$ donc
 dim virtuelle ($\mathcal{M}(A)$) < 0 et pourtant $\mathcal{M}(A) \neq \emptyset$.

Pour éliminer ces cas : on peut supposer

- w est exacte
 - L est exacte
- ou
- w est monotone ($w = dc_1$ avec $d > 0$)
 - $L \leftarrow \leftarrow \leftarrow$
- ou
- w sur $\pi_2(M) = 0$
 - $\pi_2(\pi_1 L) = 0$.

Idee de contournement:

On perturbe 0



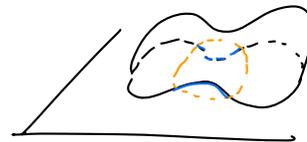
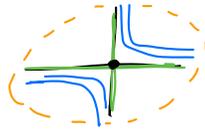
Transversalité, compacité et recollement (partie 2)

Jean-François Benaud

Compacité pour les courbes pseudo holomorphes

Exemple: Dans $\mathbb{C}P^2$,

$$\left\{ xy = \frac{1}{n} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \left\{ xy = 0 \right\}$$

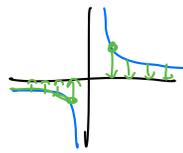


$$u_n : \mathbb{C}P^1 \longrightarrow \mathbb{C}P^2$$

un paramétrage de la

$$z \longmapsto [z : \frac{1}{nz} : 1] = [nz^2 : 1 : nz]$$

courbe



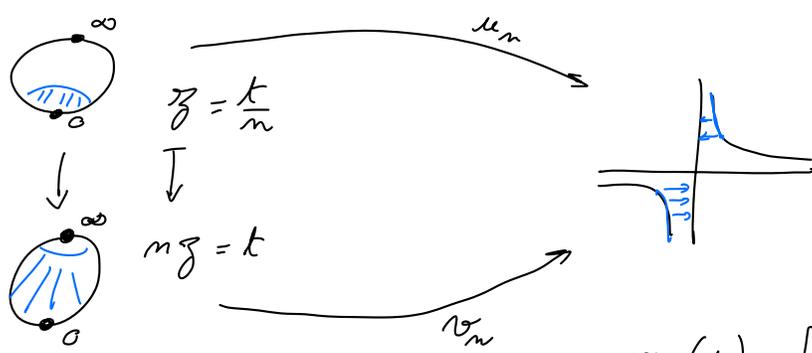
(convergence uniforme en dehors de 0)

$$u_n \xrightarrow[\text{sur tout compact de } \mathbb{C}P^1 \setminus \{0\}]{\text{C.V.U.}} [z : 0 : 1] =: u_{\infty,1}(z)$$

Au voisinage de 0 : $\|d_0 u_n\| \approx n$.

u_n^* "explose" en 0.

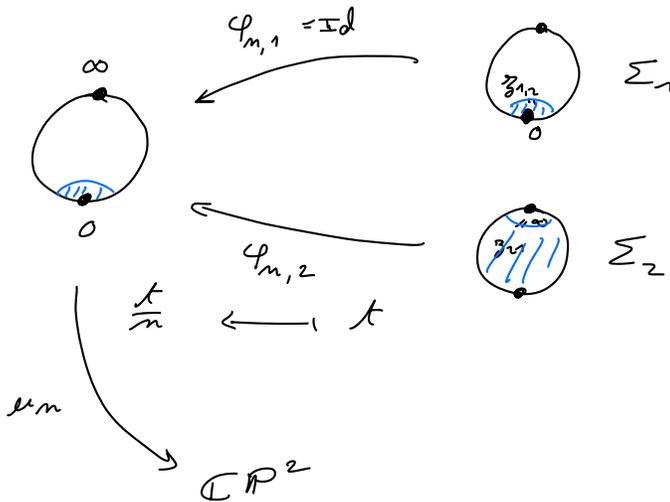
On fait un "zoom" de taille n



$$\nu_m(t) = \left[\frac{t^2}{m} : 1 : t \right]$$

$$\nu_m \xrightarrow[\text{sur tout compact de } \mathbb{C}P^1 \setminus \{\infty\}]{\text{cvu}} [0 : 1 : t] =: \mu_{\infty, 2}(t)$$

On a donc la situation suivante :



et

- $\nu_m \circ \varphi_{m,i} \xrightarrow[\text{sur tout compact de } \Sigma_i \setminus \{z_{ij}\}]{\text{cvu}} \mu_{\infty,i}$

- $\varphi_{m,i}^{-1} \circ \varphi_{m,j} \xrightarrow[\text{sur tout cpt de } \Sigma_j \setminus \{z_{ji}\}]{\text{cvu}} z_{ij}$

- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B(z_{ij}, \varepsilon)} (\nu_n \circ \varphi_{n,i})^* \omega = \int_{\Sigma_j} \mu_{\infty,j}^* \omega$

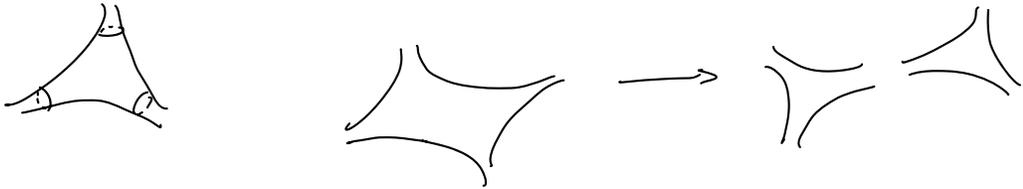
Courbes stables: ($g=0$, k points marqués)

$$\mathcal{M}_{0,k} = \{ \text{configuration de } k \text{ points distincts de } \mathbb{C}P^1 \} / \text{PSL}_2(\mathbb{C})$$



R_g métrique:

$$\{ \text{conf. de } k \text{ pts sur } \mathbb{C}P^1 \} / \text{PSL}_2 \iff \{ \text{métriques hyperboliques sur } S^2 \mid k \text{ pts} \}$$



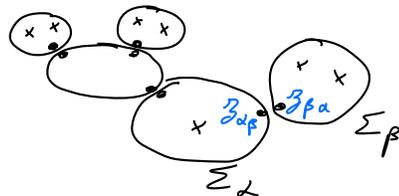
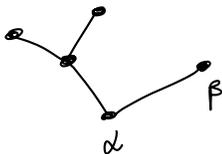
Déf.: une courbe stable ($g=0$, k pts marqués) est la

donnée de (T, Σ, Z) où

- T est un arbre
- $\Sigma = (\Sigma_\alpha)_{\alpha \in T}$, $\Sigma_\alpha = \mathbb{C}P^1$ (α sommet de l'arbre)
- $Z = \{ z_1, \dots, z_k \in \cup \Sigma_\alpha \} \cup$
(tous \neq) $\{ z_{\alpha\beta} \in \Sigma_\alpha \text{ pour chaque arête entre } \alpha \text{ et } \beta \}$

+ condition de stabilité:

$$\forall \alpha \in T, \#(\Sigma_\alpha \cap Z) \geq 3$$



pré-stable

Prop.: l'espace $\overline{\mathcal{M}}_{0,k}$ des courbes stables ($g=0$, k pts [marqués]) est une compactification de $\mathcal{M}_{0,k}$.

Déf.: Courbe J-holomorphe stable

C'est la donnée de (T, Σ, Z, u) où (T, Σ, Z) est une courbe pré-stable et

$u = (u_\alpha)_{\alpha \in T}$, $u_\alpha : \Sigma_\alpha \rightarrow X$ J-holomorphe
+ condition de stabilité :

si $u_\alpha = \text{cte}$ alors $\#(\Sigma_\alpha \cap Z) \geq 3$.

Déf.: Convergence au sens de Gromov

- (X, ω, J) var. p. complexe et sympl. (J comp. avec ω)
- $u_n : \mathbb{C}P^1 \rightarrow X$
- (T, Σ, Z, u_∞) courbe J-holo. stable

On dit que $u_n \xrightarrow{CV} u_\infty$ au sens de Gromov si :

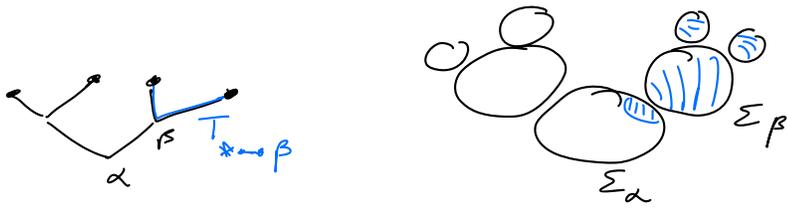
$\exists \varphi_{n,\alpha} : \Sigma_\alpha \rightarrow \mathbb{C}P^1$ t_q

• $u_n \circ \varphi_{n,\alpha} \xrightarrow{CVu}$ sur tout cpt de $\Sigma_\alpha \setminus \{\beta_i\}$ $u_{\infty,\alpha}$
 $\subset Z$

• $\varphi_{n,\alpha} \circ \varphi_{n,\beta}^{-1} \xrightarrow{CVu}$ sur tout cpt de $\Sigma_\beta \setminus \{\beta_{\alpha\beta}\}$ $\beta_{\alpha\beta}$ ($= \exists \alpha \rightarrow \beta \in T$)

• $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathcal{B}(\beta_{\alpha\beta}, \varepsilon)} (u_n \circ \varphi_{n,\alpha})^* \omega = \sum_{\gamma \in T_{* \rightarrow \beta}} \int_{\Sigma_\gamma} (u_{\infty,\gamma})^* \omega$

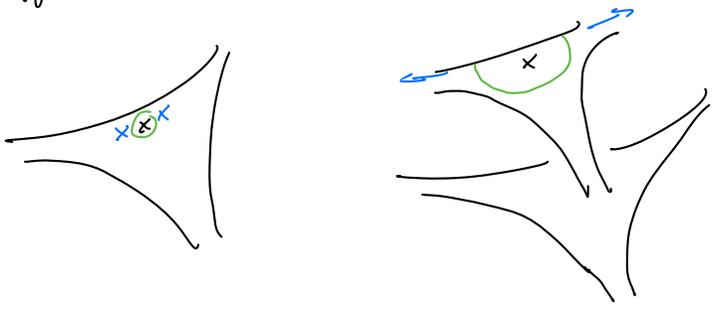
où $T_{*} \rightarrow \beta$ est la composante de $T \setminus \{\alpha \rightarrow \beta\}$ qui contient β .



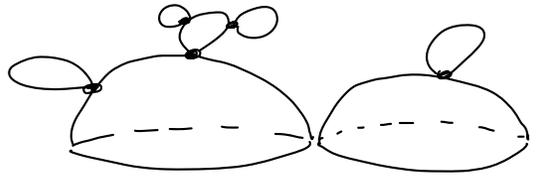
Thm: (Compacité de Gromov)

(X, ω) variété sympl. compacte (ou à bord convexe).
 J struct. compatible avec ω .
 $u_n: \mathbb{C}P^1 \rightarrow X$ J -holomorphe
 Si $(\int_{\mathbb{C}P^1} u_n^* \omega)_n$ est bornée, $(u_n)_n$ a une sous-suite qui converge au sens de Gromov.

Rem: pour faire un zoom au voisinage d'un point, il suffit de marquer 2 points ad hoc.



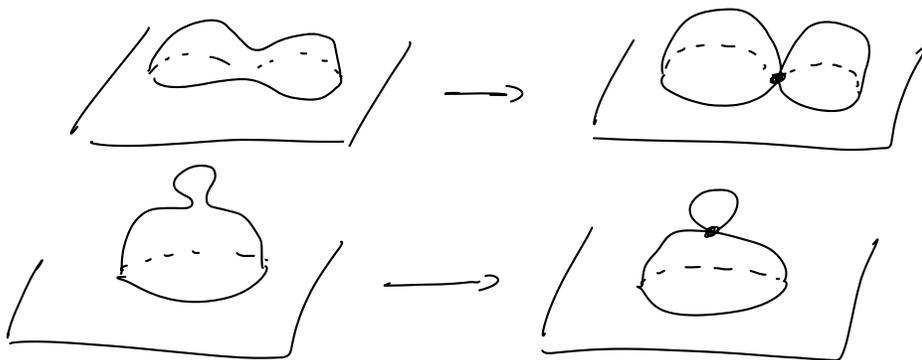
Cas à bord: (disques)



La condition de stabilité devient :

$$\#(\partial \Sigma_\alpha \cap Z) + 2\#(\dot{\Sigma}_\alpha \cap Z) \geq 3.$$

Si (u_n) est une famille de disques biholomorphes à bord dans une Lagrangienne, avec aire bornée, alors elle est compacte modulo "l'apparition de bulles".



Cas où le bord est porté par plusieurs lagrangiennes

