# Indice de Maslov

## (I) Alg. linéaire

$V$ esp. vect$/_{\mathbb{R}}$ de dim $2n$

$\omega$ forme sympl sur $V$.

Une structure complexe adaptée à $J$

est $J : V \to V$ t.q. • $J^2 = -1$

• $\omega(x, Jy) =: g_J(x,y)$

est un produit scalaire.

Alors : $h = g_J + i\omega$ forme hermitienne.

$(\omega, J, g)$ 3 parmi le prix de 2 ;

$$\begin{array}{ccc} Sp(V) \subseteq & GL(V) & \supseteq O(V) \\ & \cup\!\shortmid & \\ & GL_{\mathbb{C}}(V) & \end{array}$$

$$Sp(V) \cap GL_{\mathbb{C}}(V) = Sp(V) \cap O(V) = GL_{\mathbb{C}}(V) \cap O(\mathbb{R})$$
$$= U(V)$$

$J(V,\omega)$ = ensemble des $J$ compatibles à $\omega$.

Prop $J(V,\omega)$ contractile.

Démo : $J(V,\omega) \cong Sp(V)/U(V)$

et $U(V)$ est le compact maximal

dans $Sp(V)$.

Alternative : $\mathcal{J}(V,\omega) \overset{\exists}{\leftrightarrows} \left\{ \begin{matrix} \text{métriques} \\ \text{sur } V \end{matrix} \right\}$

contractile.

Pour $(V, \omega, \mathcal{J}, g)$ (ex: $\mathbb{C}^n$ standard)

$Lag(V)$ = ensemble des sous-e.v Lagrangiens de $V$

$\cap\!|$

$Gr(V,n)$

Thm : $\pi_1 \, Lag(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$

Démo : $L_0 \in Lag(V)$ action transitive

$\circlearrowleft$ stabilisateur

$U(V)$ $U(V)_{\mathbb{R}} \subseteq U(V)$

$(V = \mathbb{C}^n : \; O(n) \subseteq U(n))$

Alors :

$$\begin{array}{ccc} Lag(V) \xrightarrow{\simeq} U(n)/O(n) & & \pi_1(Lag(V)) \\ \downarrow{\scriptstyle \det^2} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ S^1 & & \mathbb{Z}. \end{array}$$

**Chemin canonique** : $L, L' \in Lag(V)$

si $L \cap L' = 0$, alors $\exists\, \gamma : [0,1] \longrightarrow Lag(V)$

canonique

$$0 \longmapsto L$$
$$1 \longmapsto L'$$

**Exemple** : $L, iL$ liés par $e^{\frac{\pi i t}{2}} L$.

**Raison** :

$L$ fixe, $Lag(V,L) = \{ L' \in Lag(V) \mid L' \cap L = 0 \}$.

**Thm** $Lag(V,L)$ contractile.

$\Longrightarrow \exists!$ chemin $L \longrightarrow iL \longrightarrow L'$

"canonique"

dans Lag. transverse à $L$.

**Démo du théorème** :

$$Lag(V,L) \longleftarrow \mathrm{Sym}^2(iL^*)$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Psi$$
$$\{ (x, g(x)) \in iL \oplus (iL)^* \} \longleftarrow\!\shortmid\; g$$
$$\cong$$
$$iL \oplus V/iL$$
$$\cong$$
$$V$$

## II Cas global : $(M,\omega)$ var symplectique de dim $2n$

- $J$ structure presque complexe sur $M$ :
  $J : TM \xrightarrow{\sim} TM \qquad J^2 = -1$.
- $J$ est compatible avec $\omega$ si
  $\omega(x, Jy) = g(x,y)$ est une métrique sur $M$.
- $\mathcal{J}(M,\omega)$ = espace des $J$ compatibles
  $\cap$
  $\mathrm{End}(TM)$

<u>Fait</u> : $\mathcal{J}(M,\omega)$ est contractile, par même rétraction qu'on a vue avant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{J}(M,\omega) & \rightleftarrows & \{\text{métrique sur } M\} \\ \wr & & \wr \\ * & & * \end{array}$$

Choisir $(J,g)$ compatible sur $M$
"variété presque Kähler"

__Alors__ :

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[r, "{(TM,J)}"] \arrow[dl, dashed, bend right, "\xi"'] \arrow[dr, dashed, "\xi"] & BU(n) \\
 \mathrm{Lag}(TM) \arrow[rr] & & BO(n) \simeq \mathrm{Lag}(\mathbb{C}^n)/U(n) \arrow[u] \\
 & & U(n)/O(n) \simeq \mathrm{Lag}(\mathbb{C}^n) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Obstruction à l'existence de $\xi$ : $2c_1(TM) \in H^2(M,\mathbb{Z})$

Donc choisir $\xi \iff 2c_1(TM) \underset{h}{\sim} 0$.

1-troncation

On travaille avec $\mathrm{Lag}(TM)_{\leq 1}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Lag}(TM)_{\leq 1} \arrow[d, shift left] \\
M \arrow[u, dashed, shift left, "\xi"]
\end{tikzcd}$$

fibration en $K(\mathbb{Z},1)$.

$\xi \Longleftrightarrow$ choix $2c_1(TM) \sim 0$

Pour $L \hookrightarrow M$ Lagrangien :

choix

$$\begin{tikzcd}
L \times K(\mathbb{Z},1) \simeq \mathrm{Lag}(TM)_{\leq 1}|_L \arrow[r] \arrow[d, shift left] & \mathrm{Lag}(TM)_{\leq 1} \arrow[d] \\
L \arrow[r, hook] \arrow[u, shift left, "s_L"] & M
\end{tikzcd}$$

Lagrangien déterminé par $L$

$\rightsquigarrow \underbrace{\mu_L \in H^1(L,\mathbb{Z})}$

__Déf__ : indice de Maslov de $L$.

**Déf** : Une trivialisation de $L \to K(\mathbb{Z},1)$ est une structure graduée sur $L$.

Pour $L, L' \hookrightarrow M$ deux Lagrangiens <u>transverse</u>

On suppose choisis : $\cdot\ 2c_1(TM) \sim 0$ $*$

$\cdot\ s_L \sim 0$

$\cdot\ s_{L'} \sim 0$

À $p \in L \cap L'$ :

$$\begin{tikzcd} & L' \arrow[dr, "s_{L'}"] & \\ p \arrow[ur] \arrow[dr] & & K(\mathbb{Z},1) \\ & L \arrow[ur, "s_L"'] & \end{tikzcd}$$

en $p$ : $T_pL \sim T_pL'$ dans $\mathrm{Lag}(T_pM)$

déterminé par $s_{L'}, s_L$ et $*$

Mais $L \pitchfork L' \Rightarrow \exists$ chemin canonique $\gamma$.

**Déf** : L'indice de Maslov de $p$ est

$\mu(p) \in \mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathrm{Lag}(T_pM))$.