

# Indice de Maslov

## ① Alg. linéaire

$V$  esp. vect./ $\mathbb{R}$  de dim  $2n$

$\omega$  forme sympl sur  $V$ .

Une structure complexe adaptée à  $\omega$

est  $J: V \rightarrow V$  t.g.  $J^2 = -1$

$$\bullet \omega(x, Jy) =: g_J(x, y)$$

est un produit scalaire.

Alors:  $h = g_J + i\omega$  forme hermitienne.

$(\omega, J, g)$   $\exists$  parmi le pax de  $z$ ;

$$\begin{aligned} \text{Sp}(V) &\subseteq \text{GL}(V) \supseteq \text{O}(V) \\ &\quad \cup \\ &\quad \text{GL}_{\mathbb{C}}(V) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sp}(V) \cap \text{GL}_{\mathbb{C}}(V) &= \text{Sp}(V) \cap \text{O}(V) = \text{GL}_{\mathbb{C}}(V) \cap \text{O}(V) \\ &= \text{U}(V) \end{aligned}$$

$\mathcal{J}(V, \omega) =$  ensemble des  $J$  compatibles à  $\omega$ .

Prop  $\mathcal{J}(V, \omega)$  contractile.

Démo:  $\mathcal{J}(V, \omega) \cong \text{Sp}(V) / \text{U}(V)$

et  $\text{U}(V)$  est le compact maximal dans  $\text{Sp}(V)$ .

Alternati:  $\mathcal{Z}(V, \omega) \xrightarrow{\cong} \left. \begin{array}{l} \text{métriques} \\ \text{sur } V \end{array} \right\}$   
↪ contractile.

Pour  $(V, \omega, \mathcal{Z}, g)$  (ex:  $\mathbb{C}^n$  standard)

$\text{Lag}(V) =$  ensemble des sous-e.v Lagrangiens

$\cap$  de  $V$   
 $\text{Gr}(V, n)$

Thm:  $\pi_1 \text{Lag}(V) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$

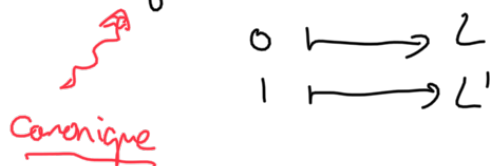
Démo:  $L_0 \in \text{Lag}(V)$  action transitive  
 $\uparrow$   
 $U(V)$  stabilisateur  
 $U(V)_{\mathbb{R}} \subseteq U(V)$   
 $(V = \mathbb{C}^n: O(n) \subseteq U(n))$

Alors:

$$\begin{array}{ccc} \text{Lag}(V) \xrightarrow{\cong} U(n)/O(n) & & \pi_1(\text{Lag}(V)) \\ \downarrow \det^2 & & \downarrow \cong \\ S^1 & & \mathbb{Z} \end{array}$$

Chemin canonique :  $L, L' \in \text{Lag}(V)$

si  $L \cap L' = 0$ , alors  $\exists \gamma: [0, 1] \rightarrow \text{Lag}(V)$

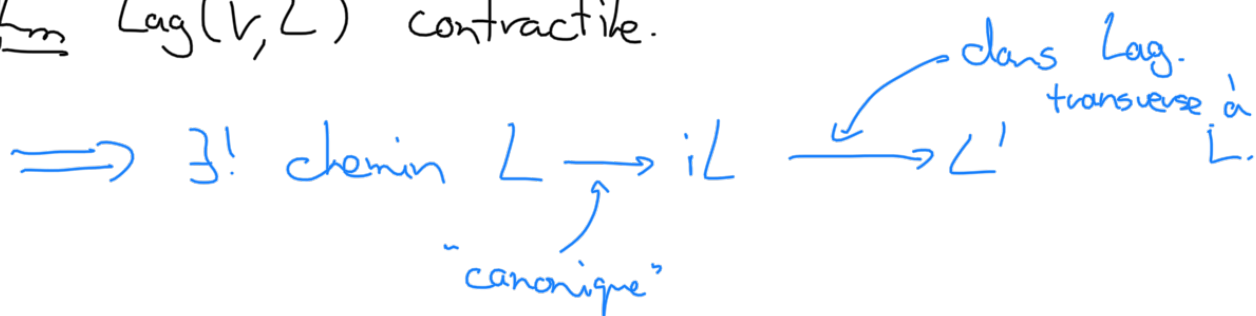


Exemple:  $L, iL$  liés par  $e^{\frac{\pi i t}{2}} L$ .

Raison:

$L$  fixe,  $\text{Lag}(V, L) = \{L' \in \text{Lag}(V) \mid L' \cap L = 0\}$ .

$\text{Lag}(V, L)$  contractile.



Démo du théorème:

$$\text{Lag}(V, L) \longleftarrow \text{Sym}^2(iL^*)$$

$$\{(x, g(x)) \in iL \oplus (iL)^*\} \longleftarrow \mathfrak{g}$$

$$iL \oplus V/iL$$

$\parallel$

$V$

② Cas global :  $(M, \omega)$  var symplectique.  
de dim  $2n$

- $\mathcal{J}$  structure presque complexe sur  $M$  :

$$\mathcal{J} : TM \xrightarrow{\sim} TM \quad \mathcal{J}^2 = -1.$$

- $\mathcal{J}$  est compatible avec  $\omega$  si

$$\omega(x, \mathcal{J}y) = g(x, y) \text{ est une m\u00e9trique sur } M.$$

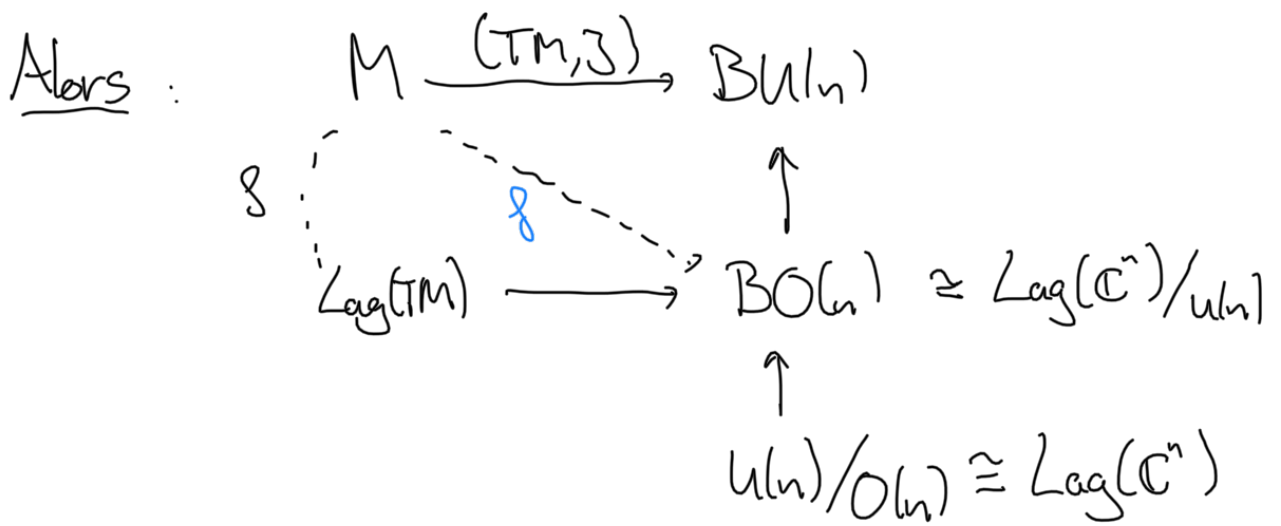
- $\mathcal{J}(M, \omega) = \text{espace des } \mathcal{J} \text{ compatibles}$   
 $\cap$   
 $\text{End}(TM)$

Fait :  $\mathcal{J}(M, \omega)$  est contractile, par m\u00eame r\u00e9traction qu'on a vue avant :

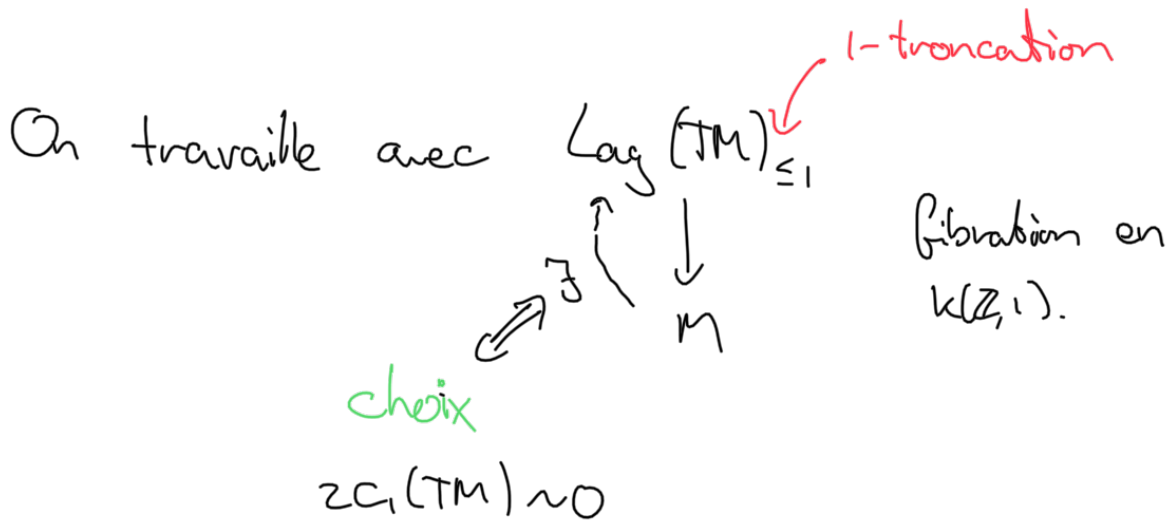
$$\mathcal{J}(M, \omega) \begin{matrix} \xrightarrow{\sim} \\ \xrightarrow{\sim} \end{matrix} \{ \text{m\u00e9trique sur } M \}$$

$\begin{matrix} ? & ? \\ * & * \end{matrix}$

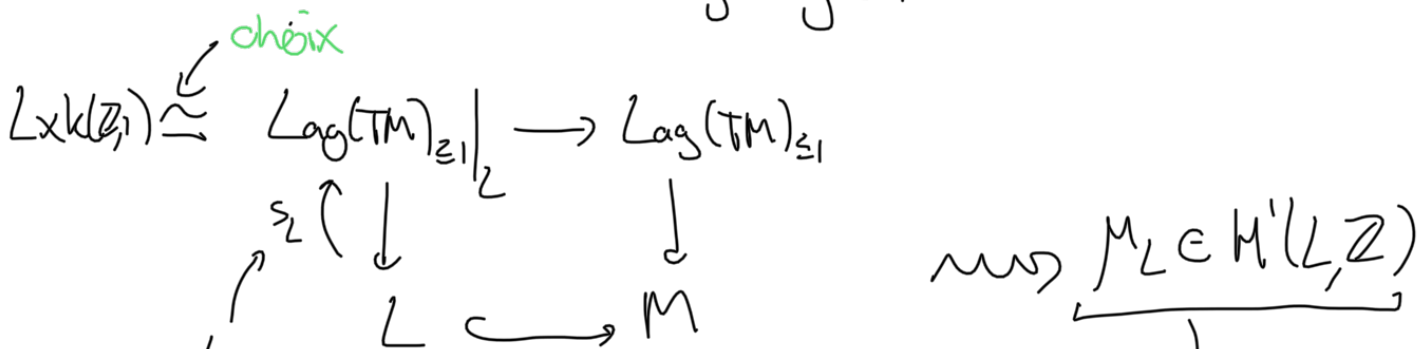
Choisir  $(\mathcal{J}, g)$  compatible sur  $M$   
"vari\u00e9t\u00e9 presque K\u00e4hler".



Obstruction à l'existence de  $\mathcal{J}$ :  $z c_1(TM) \in H^2(M, \mathbb{Z})$   
 Donc choisir  $\mathcal{J} \Leftrightarrow z c_1(TM) \underset{h}{\sim} 0$ .



Pour  $L \hookrightarrow M$  Lagrangien :



Déf: indice de Maslov de  $L$ .

Déf : Une trivialisation de  $L \rightarrow k(\mathbb{Z}, 1)$   
est une structure graduée sur  $L$ .

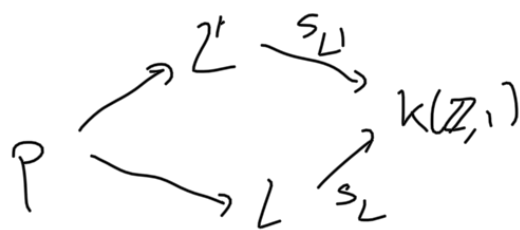
Par  $L, L' \hookrightarrow M$  deux Lagrangiens transverse

On suppose choisis :  $\cdot z_C, (TM) \sim 0$  ⊗

$$\cdot s_L \sim 0$$

$$\cdot s_{L'} \sim 0$$

À  $p \in L \cap L'$  :



en  $p$  :  $T_p L \sim T_p L'$  dans  $\text{Lag}(T_p M)$   
déterminé par  $s_{L'}, s_L$  et ⊗

Mais  $L \pitchfork L' \Rightarrow \exists$  chemin canonique  $\gamma$ .

Déf : L'indice de Maslov de  $p$  est  
 $\mu(p) \in \mathbb{Z} \cong \pi_1(\text{Lag}(T_p M))$ .