Idempotents

Elena Dimitriadis

1 _ Dans le contexte des cat.

k corps, $\mathcal{A}$ cat. linéaire sur k } struct. linéaire non nécessaire au début

Déf.: $p \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,X)$ <u>idempotent</u> si $p \circ p = p$.

On dit que (Z, l, r) (*) est <u>l'image</u> de p si

$$Z \underset{r}{\overset{l}{\rightleftarrows}} X \qquad r \circ l = e_Z \,, \quad l \circ r = p.$$

Déf.: $\mathcal{A}$ est <u>karoubienne</u> / <u>split-closed</u> s'il contient les images de tous les idempotents.

Déf.: $\mathcal{A}$ cat. linéaire. Une <u>clôture scindée</u> (<u>karoubienne</u>) est une paire $(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ où $\mathcal{B}$ karoubienne et $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ pleinement fidèle, où tout objet de $\mathcal{B}$ est l'image d'un idempotent de $\mathcal{A}$.

<u>Construction de la clôture karoubienne</u> : $\mathcal{P}\mathcal{A}$

$$\left| \begin{array}{l} \mathrm{Obj}(\mathcal{P}\mathcal{A}) = \{ (Y, p) \,,\ Y \in \mathcal{A} \,,\ p \text{ idempotent} \} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{P}\mathcal{A}}((X, p_0), (Y, p_1)) = p_1 \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)\, p_0 \end{array} \right.$$

On a $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{P}\mathcal{A}$, $Y \longmapsto (Y, e_Y)$.

Si $(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ clôture scindée de $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Prop.: si $\mathcal{A}$ est munie d'une struct. triangulée, alors $\mathcal{P}\mathcal{A}$

est munie d'une struct. triangulée induite.

2. Contexte A_∞-cat.

Notation : k la A_∞-cat. avec un seul objet et $\mathrm{Hom}(*,*) = k$.

Déf. : Soit $\mathcal{A}$ une A_∞-cat., soit $X \in \mathcal{A}$, un idempotent à homotopie près de X est un foncteur A_∞ (non unitaire) $\mathcal{P} : k \to \mathcal{A}$ avec $\mathcal{P}(*) = X$

$$\forall d \geq 1, \quad \mathcal{P}^d \in \mathrm{Hom}^{1-d}(X,X), \quad s_1 + \dots + s_r = d$$

$$\sum_r \sum_{s_1,\dots,s_r} \mu_{\mathcal{A}}^r(\mathcal{P}^{s_1}, \dots, \mathcal{P}^{s_r}) = \begin{cases} \mathcal{P}^{d-1} & \text{si } d \text{ pair} \\ 0 & \text{si } d \text{ impair} \end{cases}$$

[$d = 2$: $\mu_{\mathcal{A}}^1(\mathcal{P}^2) = \mu_{\mathcal{A}}^2(\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^1) - \mathcal{P}^1$ homotopie pour la relation d'idempotence]

Lemme : soit $p \in \mathrm{Hom}_{H(\mathcal{A})}(X,X)$ un idempotent, il existe un idempotent à homotopie près dans $\mathcal{A}$: $\mathcal{P}$ avec $[\mathcal{P}^1] = p$.

Rem. : Si on prend $\mathcal{A} = \mathrm{Top}$, alors le lemme n'est plus vrai !

Déf. : soit $\mathcal{P} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y,Y)$ un idempotent à homotopie près. On appelle l'image abstraite de $\mathcal{P}$ un A_∞-module

$$Z_{\mathcal{P}} : \mathcal{A} \longrightarrow Ch(k)$$
$$X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)[q]$$

[les polynômes formels sur q variable graduée $|q| = -1$.

Not. : δ_q envoie q^0 sur 0 et q^n sur q^{n-1}.

$\hookrightarrow$ La struct. de module sur $Z_{\mathcal{P}}$ dépend de δ_q et des $\mathcal{P}^d$, $d \geq 1$.

Prop.: Soit $\mathcal{P}$ un idempotent, $p = [\mathcal{P}^1]$ dans $H(\mathcal{A})$ et $\mathcal{Y}(p)$ dans $H^0(\mathcal{A}\text{-Mod})$. Alors $Z_{\mathcal{P}}$ est l'image de $\mathcal{Y}(p)$ dans le sens classique (*).

Cor.: Soit $\mathcal{P}$ idempotent à homotopie près, l'image abstraite de $\mathcal{P}$ ne dépend que de p à isomorphisme près dans $H(\mathcal{A}\text{-mod})$.

Déf.: Soit $\mathcal{A}$ un A_∞-cat.. On dit que $\mathcal{A}$ est karoubienne si pour tout idempotent à homotopie près $\mathcal{P}$ son image abstraite est quasi-représentable par un objet de $\mathcal{A}$.

Rappel: M quasi-représentable s'$\exists\, X$ tq $\mathcal{Y}(X)$ quasi-iso. à M.

Déf.: $\mathcal{A}$ une A_∞-cat.. Une clôture scindée de $\mathcal{A}$ est une paire $(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ où $\mathcal{B}$ karoubienne, $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ cohomologiquement pleinement fidèle et tout élément de $H^0(\mathcal{B})$ est l'image d'un idempotent dans $H^0(\mathcal{A})$.

Thm: $\mathcal{A}$ est karoubienne ssi $H^0(\mathcal{A})$ est karoubienne.

En particulier, $(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ est une clôture scindée ssi $(H^0(\mathcal{B}), H^0(\mathcal{F}))$ est une clôture scindée $H^0(\mathcal{A})$ (en particulier : $H^0(\mathcal{F})$ pleinement fidèle).

Prop.: Pour toute A_∞-cat. $\mathcal{A}$, il existe une clôture scindée. De plus, si on a $(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ et $(\mathcal{B}', \mathcal{F}')$ deux clôtures scindées, il existe une quasi-équivalence $\mathcal{G} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ telle que

$G \circ F \simeq F'$ dans $H^0(\mathrm{Fun}(A, B'))$.

<u>Construction:</u> ΠA est la sous-cat. pleine dans A-mod des objets dans $H^0(A\text{-mod})$ isomorphes à l'image abstraite d'un idempotent à homotopie près.

Soit (B, F) clôture scindée

$G : B \xrightarrow{\text{Yoneda}} B\text{-mod} \xrightarrow{F^*} A\text{-mod} \rightsquigarrow G : B \to \Pi A$ quasi-équivalence.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[rr, bend right, dashed] & \Pi A & B' \arrow[l, dashed, "\exists"'] \end{tikzcd}$$

<u>Lemme:</u> La clôture scindée d'une A_∞-cat. triangulée est aussi triangulée.

<u>Déf.:</u> Soit B A_∞-cat. triangulée karoubienne, $A \subset B$ sous cat. pleine non vide, $B' \subset B$ la plus petite sous-cat. pleine tq

- $A \subset B'$
- B' est fermée par iso dans $H^0(B)$
- B' est triangulée et karoubienne.

On dit que B est <u>engendrée de façon karoubienne</u> par A si $B' = B$.

En particulier $\Pi(\mathrm{Tw}\, A)$ est engendrée de façon karoubienne par A.

<u>Déf.:</u> A une A_∞-cat., $B = \Pi(\mathrm{Tw}\, A)$. On

appelle la cat. dérivée karoubienne $D^{\pi}(A) := H^0(B)$.

Cor.: B une A_∞-cat. triangulée, karoubienne, $A \subset B$ sous-cat. pleine qui l'engendre de façon karoubienne. Alors il existe une quasi-équivalence $\Pi(\mathrm{Tw}\, A) \longrightarrow B$ et une équivalence de cat. triangulées $H^0(B) \simeq D^{\pi}(A)$.

⚠ ΠA ne contient pas A. On peut faire une construction mais on a besoin d'une unité stricte.