Cohomologie de Floer

Bertrand Toen

M , L_0, L_1 $\quad$ tq $L_0 \pitchfork L_1$

var. sympl. $\quad$ Lagrangiennes

On fixe J sur M compatible (avec ω)

$$\left.\begin{array}{l} - \ 2c_1(T_J M) \sim 0 \\ - \ \mu_{L_i} \sim 0 \end{array}\right\} \Rightarrow p \in L_0 \cap L_1 \ , \ \mu(p) \in \mathbb{Z}$$

indice de Maslov

On cherche à définir

$$\partial : H(L_0, L_1) = \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \mathbb{Z}[-\mu(p)] \circlearrowleft$$

$$\partial(p) = \sum_{q \text{ tq } \mu(q) = \mu(p)+1} \# \mathcal{M}(p,q) \cdot q$$

nombre de "bandes holomorphes reliant $p \to q$"

Rem: $M = T^*X$, $L_0 = X \hookrightarrow T^*X$ section nulle

$f : X \to \mathbb{R}$ $\quad$ L_1 = graphe de $df : X \to T^*X$

$L_0 \pitchfork L_1 \iff f$ de Morse

$L_0 \cap L_1 \iff$ points critique de f

$\mu(p) \iff$ indice de Morse

∂ = diff. de Morse $\quad$ $H(L_0, L_1) \simeq C^*(X, f)$

complexe de Morse

Cas local (puisque tout (M, L_0, L_1) est localement de ce type)

On va supposer : M exacte : $\omega = d\eta$

L_i exactes : $\eta_{|L_i} = df_i$

$$\Omega(L_0, L_1) = \{ \alpha : [0,1] \longrightarrow M \ / \ \alpha(0) \in L_0 \, , \ \alpha(1) \in L_1 \}$$

" var. de dim. ∞ "

$\mathcal{C}^\infty$-anneaux $\longrightarrow$

$$\Omega(L_0, L_1) : (\mathrm{Var}\ \mathcal{C}^\infty)^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

$$S \longmapsto \left\{ \alpha : [0,1] \times S \longrightarrow M / \dots \, , \ \begin{array}{l} \alpha(0,-) : S \to L_0 \\ \alpha(1,-) : S \to L_1 \end{array} \right\}$$

$$L_0 \cap L_1 \subseteq \Omega(L_0, L_1) \quad \ni p \rightsquigarrow \Omega_p(L_0, L_1)$$ ← composante connexe contenant p

" chemin constants

On définit $\mathcal{A} : \Omega(L_0, L_1) \longrightarrow \mathbb{R}$

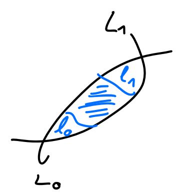
soit $\ell_0 \in \Omega_p(L_0, L_1)$, $\ell_1 \in \Omega_p(L_0, L_1)$

fixé

on choisit $u : [0,1] \longrightarrow \Omega_p(L_0, L_1)$ $\iff u : [0,1]^2 \longrightarrow M$

$\quad 0 \longmapsto \ell_0$ $\qquad (\tau, t)$

$\quad 1 \longmapsto \ell_1$



$$\mathcal{A}(\ell_1) = \int_{[0,1]^2} u^*(\omega) \in \mathbb{R}$$

C'est bien défini (indépendant de u)

car conditions exactes.

Q : $d\mathcal{A} = ?$

$$T_\ell \Omega(L_0, L_1) = \left\{ \alpha \in \Gamma([0,1], \ell^*(TM)) \ / \ \begin{array}{l} \alpha(0) \in T_{\ell(0)} L_0 , \\ \alpha(1) \in T_{\ell(1)} L_1 \end{array} \right\}$$

$$d\mathcal{A} : T_\ell \Omega(L_0, L_1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha \longmapsto \int_{[0,1]} \omega\left(\frac{\partial \ell}{\partial t}, \alpha\right)$$

Alors les points critiques de $\mathcal{A}$ sont les points $\ell \in \Omega(L_0, L_1)$

avec $d\mathcal{A}_\ell = 0$

$$\Rightarrow \frac{d\ell}{dt} = 0 \Rightarrow \ell \text{ est constant} \Rightarrow \ell = q \in L_0 \cap L_1 \subseteq \Omega(L_0, L_1)$$

On définit une "métrique" sur $\Omega(L_0, L_1)$

$$G(\alpha, \alpha') = \int_{[0,1]} \omega(\alpha, J\alpha')$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Grad}(\mathcal{A})$ champ de vecteurs tq $G(\mathrm{Grad}(\mathcal{A}), \alpha) = d\mathcal{A}(\alpha)$

$$\left(\Leftrightarrow \mathrm{Grad}(\mathcal{A}) = J\left(\frac{d\ell}{dt}\right) \right)$$

Les courbes intégrales : $u : \mathbb{R} \longrightarrow \Omega(L_0, L_1)$ tq

$$\frac{du}{dt} = -J\left(\frac{d\ell}{dt}\right)$$

$\leadsto$ $u : \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow M$ tq

(τ, t)

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} + J\dfrac{du}{dt} = 0 \\ u(\tau, 0) \in L_0 \\ u(\tau, 1) \in L_1 \end{cases} \qquad (E) \quad \text{Équation de Floer}$$

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow \Omega(L_0, L_1)$$
$$-\infty \longmapsto p$$
$$+\infty \longmapsto q \qquad \mu(q) = \mu(p) + 1$$

Thm (Floer) **Indice (D)** = dim ker D − dim coker D = 1 $(= \mu(p) - \mu(q))$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} + J\dfrac{du}{dt} = 0 \\ u(\tau,0) \in L_0 \ , \quad \lim\limits_{\tau \to -\infty} u(\tau,-) = p \\ u(\tau,1) \in L_1 \ , \quad \lim\limits_{\tau \to +\infty} u(\tau,-) = q \end{cases}$$

Symbôle du linéarisé : $\overbrace{\dfrac{du}{d\tau} + J\dfrac{du}{dt}}^{D}$ défini sur $\underbrace{\Gamma(\mathbb{R}\times[0,1], TM)}_{+\cdots}$

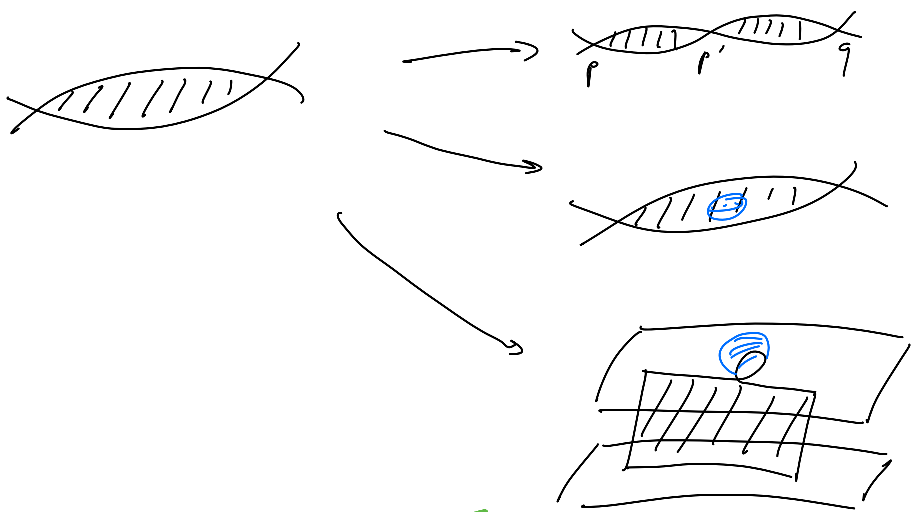
↪ opérateur $\underbrace{\text{elliptique}}_{+\cdots}$ ⇒ Fredholm

Cor.: Si (E) transverse (ie D surj.) alors

$\tilde{\mathcal{M}}(p,q)$ = { solutions de (E) } est une variété de dim. 1

$\tilde{\mathcal{M}}(p,q)/\mathbb{R} =: \mathcal{M}(p,q)$ de dim. 0 orienté (si choix de $\sqrt{\omega_{L_i}}$)

Gromov ⇒ $\mathcal{M}(p,q)$ est fini.



cas 1

cas 2

↪ [exclut si $\omega H_2(M,L_i) = 0$
vrai si exact

cas 3

$$\partial(p) = \sum_{q \,|\, \mu(q) = \mu(p)+1} \overset{\mathbb{Z}}{\#}\mathcal{M}(p,q)[q]$$ définit un endomorphisme

de $H(L_0,L_1)$ de degré 1.

Prop.: $\partial^2 = 0$

preuve : $\mu(q) = \mu(p) + 2$, $\tilde{\mathcal{M}}(p,q)$ est de dim. 2

$\Rightarrow \mathcal{M}(p,q)$ de dim. 1

$\exists$ compactification (Gromov) $\overline{\mathcal{M}}(p,q)$.

Comme les cas 2 et 3 sont exclus

$$\overline{\mathcal{M}}(p,q) \setminus \mathcal{M}(p,q) = \bigcup_{\mu(p') = \mu(p)+1} \mathcal{M}(p,p') \times \mathcal{M}(p',q).$$

Cas non-exact :

- $\mathcal{A}$ vit sur le revêtement universel de $\Omega(L_0,L_1)$ $\tilde{\Omega}(L_0,L_1)$: $\exists\, \mathcal{A} : \tilde{\Omega}(L_0,L_1) \longrightarrow \mathbb{R}$
- Pour exclure les cas 2 et 3, on suppose $\omega . H_2(M, L_i) = 0$.
- On fixe $\beta \in H_2(M, L_0 \cup L_1)$

$\mathcal{M}_\beta(p,q)$ = bandes pseudo holomorphes de classe β.

$$\partial(p) = \sum_{q / \mu(q) = \mu(p)+1} \# \mathcal{M}_\beta(p,q)\, T^{\mathcal{A}(\beta)} . [q]$$

$$\in \Lambda = \left\{ \sum a_i T^{\alpha_i},\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ \lim_i \alpha_i = +\infty,\ \#\{\alpha_i < 0\} < +\infty \right\}$$

anneau de Novikov