Chapitre 3

Dérivabilité des fonctions réelles

La notion de dérivée est une notion fondamentale en analyse. Elle permet d'étudier les variations d'une fonction, de construire des tangentes à une courbe et de résoudre des problèmes d'optimisation.

En physique, lorsqu'une grandeur est fonction du temps, la dérivée de cette grandeur donne la vitesse instantanée de variation de cette grandeur, et la dérivée seconde donne l'accélération.

3.1 Fonctions dérivables

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 3.1.1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in I$. On dit que f est dérivable en x_0 si la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existe, et est finie. Cette limite s'appelle la dérivée de f en x_0, on la note $f'(x_0)$.

Bien sûr, il revient au même de regarder la limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Rappelons l'interprétation géométrique de la dérivée : si f est dérivable en x_0, alors la courbe représentative de la fonction f admet une tangente au point $(x_0, f(x_0))$, de coefficient directeur $f'(x_0)$.

En fait, la fonction $h \mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ dont on considère ici la limite en 0, n'est pas définie en ce point. Dans ce cas, l'existence de la limite équivaut à l'égalité des limites à gauche et à droite. C'est pourquoi on introduit les dérivées à gauche et à droite.

Définition 3.1.2. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in I$.

(1) On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la limite

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existe, et est finie. Cette limite s'appelle la dérivée de f à gauche en x_0, on la note $f'_g(x_0)$.

(2) On définit de même la dérivée à droite, que l'on note $f'_d(x_0)$.

Proposition 3.1.3. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction.*

(1) *Soit $x_0 \in]a,b[$. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.*

(2) *f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite en a.*

(3) *f est dérivable en b si et seulement si f est dérivable à gauche en b.*

Les notions de dérivée à droite et à gauche ne sont pas très importantes. Elles permettent cependant de vérifier qu'une fonction est (ou n'est pas) dérivable en un point.

Proposition 3.1.4. *Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.*

Démonstration. Supposons f dérivable en x_0, alors la limite

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe, et est finie. En multipliant par la fonction $(x - x_0)$, qui tend vers 0, on en déduit que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) - f(x_0) = 0$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0)$$

ce qui montre que f est continue en x_0. □

La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en ce point. En effet, $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$.

Proposition 3.1.5. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in I$. Alors f est dérivable en x_0, de dérivée $f'(x_0)$, si et seulement si il existe une fonction ε telle que $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, satisfaisant*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

pour tout h tel que $x_0 + h \in I$.

Démonstration. $\Rightarrow$. Supposons f dérivable en x_0. Alors il suffit de définir

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$

pour $h \neq 0$, et $\varepsilon(0) = 0$. $\Leftarrow$. Supposons qu'il existe une fonction ε telle que $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, satisfaisant

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\ell + h\varepsilon(h)$$

pour un certain réel ℓ. On peut écrire :

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell + \varepsilon(h)$$

Quand h tend vers 0, le membre de droite tend vers ℓ. Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$. $\square$

Conséquences immédiates de cette proposition :

- si f est dérivable en x_0, et si λ est un réel, alors λf est dérivable en x_0, de dérivée $\lambda f'(x_0)$.
- une fonction constante est partout dérivable, de dérivée nulle.
- une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est partout dérivable, et $f'(x_0) = a$ pour tout x_0.

Voici deux exemples bien connus.

Exemples. a) Soit $n \geq 1$ un entier, nous allons dériver la fonction $f : x \mapsto x^n$. Soit x_0 un réel fixé, alors d'après la formule du binôme de Newton nous avons, pour tout h,

$$\begin{aligned} f(x_0+h) = (x_0+h)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k} \\ &= x_0^n + h(nx_0^{n-1}) + h^2 \left(\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-2} x_0^{n-k} \right) \end{aligned}$$

et le dernier terme est une fonction de la forme $h\varepsilon(h)$. Ainsi, f est dérivable en x_0, et $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.

b) Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$, et soit $x_0 \neq 0$. Alors, pour tout h nous avons

$$g(x_0+h) - g(x_0) = \frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0} = -\frac{h}{x_0(x_0+h)}$$

d'où

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = -\frac{1}{x_0^2}$$

Donc g est dérivable en x_0, et $g'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$.

C'est Blaise Pascal qui, au début du 17ᵉ siècle, a le premier mené des études sur la notion de tangente à une courbe.

Dès la seconde moitié du 17ᵉ siècle, le domaine mathématique de l'analyse numérique connaît une avancée prodigieuse grâce aux travaux de Newton et de Leibniz en matière de calcul différentiel et intégral.

Le marquis de l'Hôpital participe aussi, à la fin du 17ᵉ siècle, à étoffer cette nouvelle théorie, notamment en utilisant la dérivée pour calculer une limite dans le cas de formes indéterminées particulières (c'est la règle de L'Hôpital, énoncée à la fin du chapitre).

Finalement, d'Alembert introduit la définition rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement — sous une forme semblable à celle qui est enseignée de nos jours. Cependant, à l'époque de d'Alembert, c'est la notion de limite qui pose problème. C'est seulement avec les travaux de Weierstrass au milieu du 19ᵉ siècle que le concept de dérivée sera entièrement formalisé.

C'est Lagrange (fin du 18ᵉ siècle) qui a introduit la notation $f'(x_0)$ pour désigner la dérivée de f en x_0. Leibniz notait

$$\frac{df}{dx}(x_0)$$

et Newton $\dot{f}(x_0)$. Ces trois notations sont encore usitées de nos jours.

3.2 Opérations sur les dérivées

Commençons par les opérations algébriques sur les dérivées.

Théorème 3.2.1. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions, et soit $x_0 \in I$. On suppose que f et g sont dérivables en x_0. Alors*

(1) *$f + g$ est dérivable en x_0, et*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(2) *fg est dérivable en x_0, et*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(3) *si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0, et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Démonstration. (1) Il suffit d'écrire

$$\frac{(f(x)+g(x)) - (f(x_0)+g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

et de passer à la limite quand $x \mapsto x_0$. (2) Il suffit d'écrire

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

et de passer à la limite quand $x \mapsto x_0$, en se servant de la continuité de g en x_0. (3) Nous avons

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{-1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Par passage à la limite, on en déduit que la fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0, de dérivée

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

On applique alors le point (1) qui donne

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\right)$$

d'où le résultat. $\square$

Conséquences de ce théorème :

- une fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est un polynôme.
- une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) est dérivable sur son ensemble de définition, et sa dérivée est une fonction rationnelle.

En effet, nous avons vu que les fonctions de la forme $x \mapsto x^n$ sont dérivables sur tout $\mathbb{R}$. On en déduit que les monômes $x \mapsto \lambda x^n$ sont dérivables, puis que les sommes de monômes, c'est-à-dire les polynômes, sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Le résultat pour les fonctions rationnelles en découle, par dérivation d'un quotient.

Après les opérations algébriques, passons à la composition des fonctions.

Théorème 3.2.2 (Dérivation des fonctions composées)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subseteq J$, et soit $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0, et si g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Démonstration. Il existe des fonctions ε_1 et ε_2 telles que

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon_1(h) = 0 = \lim_{h \to 0} \varepsilon_2(h)$$

satisfaisant, pour tout h,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon_1(h)$$

et, pour tout k,

$$g(f(x_0)+k) = g(f(x_0)) + kg'(f(x_0)) + k\varepsilon_2(k)$$

Prenons en particulier

$$k = h(f'(x_0) + \varepsilon_1(h))$$

Alors nous avons

$$\begin{aligned} g(f(x_0+h)) &= g(f(x_0)+k) \\ &= g(f(x_0)) + kg'(f(x_0)) + k\varepsilon_2(k) \\ &= g(f(x_0)) + h(f'(x_0)+\varepsilon_1(h))g'(f(x_0)) \\ &+ h(f'(x_0)+\varepsilon_1(h))\varepsilon_2(h(f'(x_0)+\varepsilon_1(h))) \\ &= g(f(x_0)) + hf'(x_0)g'(f(x_0)) + h\varepsilon_3(h) \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\varepsilon_3(h) = \varepsilon_1(h)g'(f(x_0)) + (f'(x_0)+\varepsilon_1(h))\varepsilon_2(h(f'(x_0)+\varepsilon_1(h)))$$

Il est clair que $\lim_{h\to 0}\varepsilon_3(h) = 0$, d'où le résultat. □

On voudrait à présent calculer les dérivées des fonctions usuelles. Montrer que les fonctions trigonométriques sin et cos sont dérivables (et calculer leurs dérivées) n'est pas évident, et dépend des définitions que l'on donne pour ces fonctions.

Pour log et exp, c'est plus facile... si on définit log comme l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1. Mais encore faut-il montrer qu'une telle primitive existe : ce sera un résultat important du chapitre consacré à l'intégration. La fonction exp est ensuite définie comme la réciproque de la fonction log, et pour la dériver on se sert du résultat suivant.

Théorème 3.2.3 (Dérivation des fonctions réciproques). *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. Alors :*

(1) *L'ensemble $J := f(I)$ est un intervalle, dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I. La fonction f réalise une bijection entre I et J.*

(2) *La bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue strictement monotone, de même sens de variations que f.*

(3) *Si f est dérivable en un point $x_0 \in I$, et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Démonstration. (1) et (2) : c'est le théorème de la bijection (voir le chapitre 2). (3). Supposons f dérivable en x_0. Soit $y_0 = f(x_0)$ et soit $y \in J$, on s'intéresse à la quantité

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

Posons $x = f^{-1}(y)$, alors cette quantité s'écrit

$$\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

Comme f^{-1} est continue en y_0, nous avons :

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$$

Par composition des limites, on en déduit que

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

d'où le résultat. □

Exemple. Supposons que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ admette une primitive, notée log, qui s'annule en 1. Soit $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ l'application réciproque de log. Alors exp est dérivable en tout point $y_0 \in \mathbb{R}$, et satisfait

$$\exp'(y_0) = \frac{1}{\log'(\exp(y_0))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(y_0)}} = \exp(y_0)$$

3.3 Dérivée et extréma locaux

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. On dit que f admet un *maximum local* en x_0 s'il existe un voisinage V de x_0 tel que l'on ait

$$\forall x \in I \cap V, f(x) \leq f(x_0)$$

On dit que f admet un *minimum local* en x_0 si $-f$ admet un maximum local en x_0.

Enfin, on dit que f admet un *extremum local* si f admet un maximum local ou un minimum local.

Proposition 3.3.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable, et soit x_0 un point intérieur à I. Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

Démonstration. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que f admet un maximum local en x_0. Il existe donc un voisinage V de x_0 tel que l'on ait

$$\forall x \in V, f(x) - f(x_0) \leq 0$$

Comme x_0 est un point intérieur à I, on peut choisir V inclus dans I, c'est-à-dire que f est définie sur V tout entier. Comme f est dérivable en x_0, qui est intérieur à V, les dérivées à droite et à gauche de f en x_0 existent, et sont égales. De plus, nous avons, pour tout $x \in V$,

$$x < x_0 \Longrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

d'où, par passage à la limite :

$$f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Un raisonnement analogue montre que $f'_d(x_0) \leq 0$. Comme $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$ on en déduit que $f'(x_0) = 0$. $\square$

Autrement dit, les extréma d'une fonction à l'intérieur d'un intervalle sont à chercher parmi les points où la dérivée s'annule.

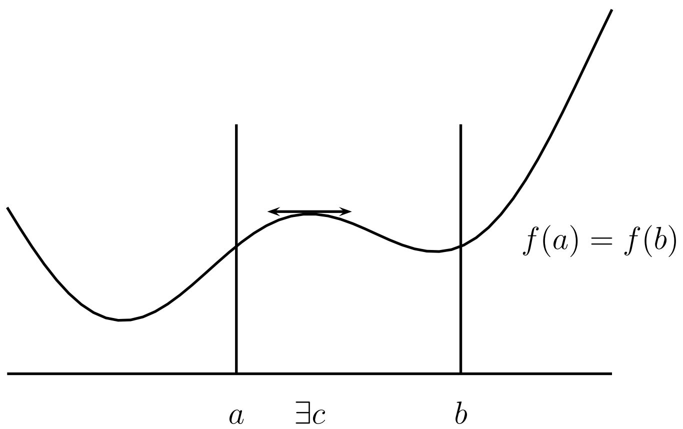
Attention, la réciproque est fausse : il se peut que la dérivée s'annule en un point qui n'est pas un extremum. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x^3$ a sa dérivée qui s'annule en 0, mais n'admet pas d'extremum en ce point.

De même, la proposition devient fausse si x_0 est au bord de l'intervalle. Par exemple, la fonction $x \mapsto x + 1$, $[0, 1] \to [0, 1]$ admet un minimum en 0 et un maximum en 1, et pourtant sa dérivée ne s'annule jamais.

3.4 Rolle, accroissements finis

3.4.1 Théorème de Rolle

Première observation : si on trace une courbe dérivable entre deux points du plan, avec même ordonnée au départ et à l'arrivée, alors il y a toujours un point où la tangente est horizontale.



Théorème 3.4.1 (Rolle). *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. D'après le théorème des bornes, f admet un minimum et un maximum globaux sur $[a, b]$, notés m et M respectivement. Si $m = M$, alors f est constante sur $[a, b]$, donc f' est nulle sur tout $]a, b[$ et c'est fini. Si $m \neq M$, alors, sachant que $f(a) = f(b)$, l'un au moins de ces deux extréma est atteint en un point c appartenant à l'intervalle ouvert $]a, b[$. Mais alors, c est un extremum local intérieur à $[a, b]$, donc $f'(c) = 0$ d'après ce qu'on a vu précédemment. □

C'est en 1691 que Michel Rolle démontre ce théorème, pour les fonctions polynomiales uniquement. Il s'agit donc à l'origine d'un résultat d'algèbre. Il faut attendre 1860 pour que Pierre-Ossian Bonnet énonce le théorème de Rolle dans sa version moderne. Celui-ci devient alors un point central de l'analyse réelle.

Nous donnons ci-dessous la version « historique ».

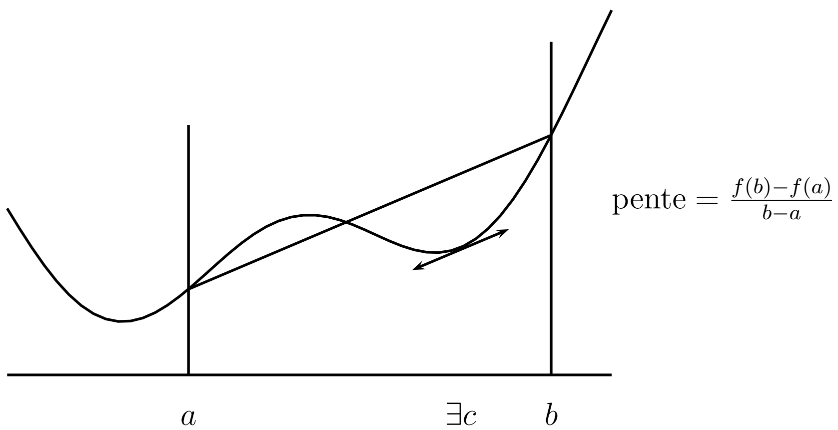
Corollaire 3.4.2. *Soit P un polynôme réel ayant au moins n racines réelles distinctes, avec $n \geq 2$. Alors son polynôme dérivé P' a au moins $n-1$ racines réelles distinctes.*

Démonstration. Soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ les racines de P rangées par ordre croissant. On applique le th. de Rolle à la fonction P sur chacun des intervalles $[a_1, a_2], \ldots, [a_{n-1}, a_n]$, ce qui donne $n-1$ points distincts en lesquels P' est nul. □

3.4.2 Théorème des accroissements finis

Question : que devient le théorème de Rolle dans le cas où $f(b) \neq f(a)$?

Réponse : le taux d'accroissement entre a et b est réalisable comme pente d'une tangente en un certain point.



Théorème 3.4.3 (Accroissements finis)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Démonstration. Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a)$$

Alors φ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. De plus

$$\varphi(a) = 0$$

et

$$\varphi(b) = f(b) - f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(b-a) = 0$$

On peut appliquer le théorème de Rolle à φ : il existe donc $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

d'où le résultat. □

Il existe aussi une version « différentielle » de ce théorème.

Théorème 3.4.4. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable, et soit $x_0 \in I$. Alors, pour tout h tel que $x_0 + h \in I$, il existe un réel $\theta \in]0,1[$ tel que*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h)$$

Ceci constitue une version « globale » de l'écriture

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

Démonstration. Si $h = 0$ c'est évident. Supposons $h > 0$, on applique le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[x_0, x_0 + h]$. Cela nous donne l'existence d'un $c \in]x_0, x_0 + h[$ tel que

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(c)$$

D'autre part, on peut toujours écrire c sous la forme $x_0 + \theta h$ avec $\theta \in]0,1[$. Ceci nous donne le résultat. Le cas $h < 0$ se traite par la même méthode. □

3.5 Conséquences

3.5.1 Inégalité des accroissements finis

Proposition 3.5.1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*

(1) *On suppose qu'il existe un réel M tel que*

$$\forall x \in]a,b[, \quad f'(x) \leq M$$

Alors

$$f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

(2) *Assertion analogue si f' est minorée sur $]a,b[$.*

(3) *On suppose qu'il existe un réel λ tel que*

$$\forall x \in]a,b[, \quad |f'(x)| \leq \lambda$$

Alors

$$|f(b) - f(a)| \leq \lambda |b-a|$$

C'est cette version qui justifie le nom du théorème : si la dérivée est bornée par λ, alors le taux d'accroissement global est lui aussi borné par λ.

Illustration physique : si la vitesse instantanée d'un véhicule ne dépasse pas 120 km/h, alors sa vitesse moyenne non plus.

Exemples. a) Quels que soient x et y,

$$|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$$

En effet, il suffit de montrer ceci pour $x \leq y$. On considère la fonction sin sur l'intervalle $[x,y]$, dont la dérivée est cos. Mais $|\cos(t)| \leq 1$ pour tout t, d'où le résultat.

b) Pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x+1} \leq \log(x+1) - \log(x) \leq \frac{1}{x}$$

En effet, on applique le théorème pour la fonction log sur l'intervalle $[x, x+1]$, dont la dérivée est $t \mapsto \frac{1}{t}$. Comme cette dernière est décroissante, elle est majorée par $\frac{1}{x}$ et minorée par $\frac{1}{x+1}$ sur l'intervalle $[x, x+1]$. D'où le résultat.

c) Pour tout $x > 0$,

$$e^x - 1 \geq x$$

En effet, on applique le théorème à la fonction $t \mapsto e^t$ sur l'intervalle $[0, x]$. Cette fonction est sa propre dérivée et $e^t \geq 1$ pour tout $t \geq 0$, d'où le résultat.

3.5.2 Dérivée et sens de variation

Nous allons enfin démontrer le théorème suivant, que tout le monde connaît et utilise au quotidien.

Théorème 3.5.2. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors*

(1) *f est constante* $\iff \forall x \in I, f'(x) = 0$

(2) *f est croissante* $\iff \forall x \in I, f'(x) \geq 0$

(3) $\forall x \in I, f'(x) > 0 \implies$ *f est strictement croissante*

Remarque. La réciproque du (3) est fausse : la fonction $f : x \mapsto x^3$ est strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$, mais $f'(0) = 0$.

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ trivial. $\Leftarrow$ Soient $a, b \in I$ avec $a < b$, alors par le théorème des accroissements finis il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) = 0$$

donc $f(b) = f(a)$, ce qui montre que f est constante.

(2) $\Rightarrow$ Supposons f croissante, et soit $x_0 \in I$. Alors, pour tout h nous avons

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

(en effet, si $h > 0$ alors $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$, et si $h < 0$ alors $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$). On en déduit par passage à la limite que $f'(x_0) \geq 0$. $\Leftarrow$ Soient $a, b \in I$ avec $a < b$, alors par le théorème des accroissements finis il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \geq 0$$

donc $f(a) \leq f(b)$, ce qui montre que f est croissante.

(3) Même principe que (2). □

3.5.3 Règle de l'Hôpital

Théorème 3.5.3 (Règle de l'Hôpital)**.** *Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $]a, b[$ telles que*

$$f(a) = g(a) = 0$$

On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$ et que la limite

$$\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(éventuellement infinie) existe. Alors la limite

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

existe, et lui est égale.

Cette règle permet de lever certaines indéterminations de la forme $\frac{0}{0}$. Notons qu'on peut appliquer la recette plusieurs fois de suite !

Démonstration. On se sert du théorème des accroissements finis généralisé (que nous ne démontrons pas ici) : si f et g sont continues sur $[x,y]$, dérivables sur $]x,y[$, et si g' ne s'annule pas sur $]x,y[$, alors il existe $c \in]x,y[$ tel que

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Appliquons ce théorème à la situation présente : étant donné $x \in]a,b[$, il existe $c_x \in]a,x[$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Quand on fait tendre x vers a, le réel c_x tend également vers a. Sachant que $\lim_{c\to a+} \frac{f'(c)}{g'(c)}$ existe, on en déduit (par composition des limites) que

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a+} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ce qu'on voulait. □

Exemples. a) Soit à calculer la limite

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x^2+3x}$$

qui est de la forme $\frac{0}{0}$. En appliquant la règle de l'Hôpital, il vient

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x^2+3x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos x}{2x+3} = \frac{1}{3}$$

b) Autre exemple (à faire en exercice) :

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\cos(2x)-1}{x^3+5x^2}$$