Chapitre 2

Continuité des fonctions réelles

2.1 Généralités

Définition 2.1.1. Une fonction réelle f est une application d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La partie D est appelée ensemble (ou domaine) de définition de la fonction.

Une fonction peut être définie de plusieurs façons :

- Par une formule explicite : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3}}{\cos x}$
- Abstraitement : $\pi(x)$ est le nombre de nombres premiers compris entre 0 et x.

2.2 Limite d'une fonction en un point

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que x_0 est *adhérent* à D s'il existe une suite d'éléments de D qui converge vers x_0. On note $\overline{D}$ l'ensemble des points adhérents à D. Tout point de D est adhérent à D, c'est-à-dire que $D \subseteq \overline{D}$. En général, $\overline{D}$ est plus grand que D.

Exemples. a) Si $D = [0, 1[$, alors $\overline{D} = [0, 1]$.

b) Si $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$, alors $\overline{D} = [0, +\infty]$.

c) Si $D = \{\sin(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, alors $\overline{D} = [-1, 1]$.

Définition 2.2.1. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in \overline{D}$. On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$ pour limite en x_0 si :

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } \delta > 0 \text{ tel que, pour tout } x \in D,$$
$$|x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

ou, avec des quantificateurs,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Ceci se traduit de la façon suivante : pour tout $\varepsilon > 0$ (arbitrairement petit), il existe $\delta > 0$ tel que, si x est à une distance inférieure à δ de x_0, alors $f(x)$ est à une distance inférieure à ε de ℓ. Insistons sur le fait que δ dépend de ε !

Pour exprimer le fait que f admet ℓ pour limite en x_0, nous noterons

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$$

On peut aussi dire que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers x_0.

Pour que ceci ait un sens, il faut montrer l'unicité de la limite — quand elle existe.

Proposition 2.2.2. *Si une fonction admet ℓ et ℓ' pour limites en un même point x_0, alors $\ell = \ell'$.*

Démonstration. Même principe que pour l'unicité de la limite d'une suite. □

Nous avons clairement les équivalences :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to x_0} (f(x) - \ell) = 0 \iff \lim_{x\to x_0} |f(x) - \ell| = 0$$

Proposition 2.2.3. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in D$. Si f admet une limite en x_0, alors celle-ci est forcément égale à $f(x_0)$.*

Démonstration. Soit ℓ la limite de f en x_0. Soit $\varepsilon > 0$, alors

$$\exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

En particulier, en prenant $x = x_0$, la condition $|x - x_0| \leq \delta$ est satisfaite, donc

$$|f(x_0) - \ell| \leq \varepsilon$$

Ainsi $|f(x_0) - \ell|$ est un réel positif inférieur à toute quantité strictement positive, donc est nul, c'est-à-dire que $\ell = f(x_0)$. □

Définition 2.2.4. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in D$. On dit que f est continue en x_0 si f admet une limite en x_0, c'est-à-dire (d'après la proposition) si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Définition 2.2.5. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in \overline{D} \backslash D$. On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 s'il existe une fonction $g : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ continue en x_0 telle que $g|_D = f$.

Proposition 2.2.6. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in \overline{D} \backslash D$. Alors f est prolongeable par continuité en x_0 si et seulement si f admet une limite (finie) en x_0.*

2.2.1 Limites à droite et à gauche

Définition 2.2.7. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in \overline{D}$.

(1) On dit que f admet ℓ pour limite à droite en x_0 si la restriction de f à $D \cap]x_0, +\infty[$ admet ℓ pour limite en x_0. On note

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

(2) On dit que f admet ℓ pour limite à gauche en x_0 si la restriction de f à $D \cap]-\infty, x_0[$ admet ℓ pour limite en x_0. On note

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$

Pour que la limite à droite existe, il faut que x_0 soit un point adhérent à $D \cap]x_0, +\infty[$. Notons également que, même dans le cas où f est définie en x_0, la valeur $f(x_0)$ n'intervient plus dans le calcul de la limite à droite, puisqu'on a enlevé x_0 de l'ensemble de définition.

On peut faire la même remarque pour la limite à gauche.

Remarque. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in D$.

a) La fonction f admet une limite en x_0 (c'est-à-dire, f est continue en x_0) si et seulement si elle admet $f(x_0)$ comme limite à droite et à gauche en x_0.

b) Si f admet des limites distinctes à droite et à gauche en x_0, alors f n'admet pas de limite en x_0.

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction égale à 1 sur $\mathbb{R}^*$, et nulle en 0. Alors

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 1 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$$

et pourtant f n'admet pas de limite en 0 (elle est discontinue en 0).

2.2.2 Caractérisation séquentielle de la limite

L'idée est très simple : pour faire tendre x vers x_0, on peut prendre une suite qui converge vers x_0.

Proposition 2.2.8. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $x_0 \in \overline{D}$. Alors f admet ℓ pour limite en x_0 si et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de D qui converge vers x_0, la suite $f(u_n)$ converge vers ℓ.*

Démonstration. $\Rightarrow$. Supposons que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, et soit (u_n) une suite qui converge vers x_0. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in D, |x - x_0| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

D'autre part, on sait que

$$\exists N_\delta \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\delta, |u_n - x_0| \leq \delta$$

on en déduit que

$$\forall n \geq N_\delta, |f(u_n) - \ell| \leq \varepsilon$$

$\Leftarrow$. Nous allons montrer la contraposée, à savoir : si $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq \ell$, alors il existe une suite (u_n) d'éléments de D qui converge vers x_0, telle que $f(u_n)$ ne converge pas vers ℓ.

Supposons que f n'admette pas ℓ pour limite en x_0. Alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in D, |x - x_0| \leq \delta \text{ et } |f(x) - \ell| > \varepsilon$$

En particulier, en prenant $\delta = \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists u_n \in D, |u_n - x_0| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(u_n) - \ell| > \varepsilon$$

Mais alors, la suite (u_n) converge vers x_0 et la suite $f(u_n)$ ne converge pas vers ℓ. Ce qu'on voulait. $\square$

2.2.3 Opérations sur les limites

Théorème 2.2.9. *Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions, et soit $x_0 \in \overline{D}$. On suppose que*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell'$$

Alors

(1) *La fonction $f + g$ admet $\ell + \ell'$ pour limite en x_0.*

(2) *La fonction fg admet $\ell\ell'$ pour limite en x_0.*

(3) *Supposons $\ell \neq 0$. Alors la fonction $\frac{1}{f}$ est bien définie dans un voisinage de x_0, et admet $\frac{1}{\ell}$ pour limite en x_0.*

On appelle *voisinage* de x_0 un intervalle ouvert de la forme $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ avec $\delta > 0$.

Démonstration. Grâce à la caractérisation séquentielle de la limite, on se ramène à la proposition analogue pour les limites de suites. Le seul point à montrer est que, si $\ell \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est bien définie dans un voisinage de x_0. Supposons $\ell > 0$, alors nous avons :

$$\exists \delta > 0, \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, f(x) \geq \frac{\ell}{2}$$

En effet, la négation s'écrit

$$\forall \delta > 0, \exists x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, f(x) < \frac{\ell}{2}$$

ce qui contredit le fait que f admette ℓ pour limite en x_0. □

On peut récupérer les théorèmes sur les limites de suites (par exemple, le théorème des gendarmes) et les adapter pour les limites de fonctions.

On peut aussi composer les limites de fonctions.

Théorème 2.2.10. *Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions, telles que $f(D_1) \subseteq D_2$, et soit $x_0 \in \overline{D_1}$. On suppose que f admet ℓ pour limite en x_0. Alors ℓ appartient à $\overline{D_2}$. De plus, si g admet une limite en ℓ, alors $g \circ f$ admet la même limite en x_0.*

En d'autres termes, si $\lim_{y \to \ell} g(y)$ existe, alors :

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{y \to \ell} g(y)$$

La réciproque est fausse : il se peut que le membre de gauche existe, mais pas celui de droite. Par exemple, si f est la fonction nulle, alors $g \circ f$ est la fonction constante égale à $g(0)$, donc admet une limite en tout point, alors que la limite de g en 0 peut très bien ne pas exister.

Démonstration. Comme x_0 est adhérent à D_1, il existe une suite (u_n) d'éléments de D_1 qui converge vers x_0. Comme f admet ℓ pour limite en x_0, on en déduit que la suite $(f(u_n))$ (à valeurs dans D_2) converge vers ℓ, d'où $\ell \in \overline{D_2}$.

Supposons à présent que $\lim_{y \to \ell} g(y)$ existe, notons-la ℓ'. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall y \in D_2, |y - \ell| \leq \delta \Longrightarrow |g(y) - \ell'| \leq \varepsilon$$

d'autre part, comme f admet ℓ pour limite en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in D_1, |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \delta$$

En regroupant le tout, on trouve :

$$\forall x \in D_1, |x - x_0| \leq \eta \Longrightarrow |g(f(x)) - \ell'| \leq \varepsilon$$

ce qu'on voulait. □

2.2.4 Limites infinies

On peut récupérer ce qui a été fait pour les suites : les opérations algébriques sur les limites infinies sont les mêmes. On peut aussi composer les limites infinies.

2.3 Propriétés des fonctions continues

Définition 2.3.1. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue si elle est continue en tout point de D.

Si f et g sont continues sur D, alors $f+g$ et fg sont continues sur D, et $\frac{1}{f}$ est continue partout où elle est définie. La fonction $|f|$ est également continue sur D.

2.3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

On l'appelle plus familièrement le TVI. Il est démontré par Cauchy dans son cours de 1821.

Théorème 2.3.2 (Valeurs intermédiaires)**.** *Soient a et b deux réels avec $a < b$, et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, pour tout réel r compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = r$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(a) < r < f(b)$. Nous construisons par récurrence une suite d'intervalles $[a_k, b_k]$, de la façon suivante.

– $[a_0, b_0] = [a, b]$

– Supposons $[a_k, b_k]$ construit. Soit $m_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ le milieu de cet intervalle. Si $f(m_k) = r$, on s'arrête. Sinon, on pose

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [m_k, b_k] & \text{si } f(m_k) < r \\ [a_k, m_k] & \text{si } f(m_k) > r \end{cases}$$

Si la suite d'intervalles ainsi construite est finie, alors on a trouvé un c tel que $f(c) = r$. Sinon, nous avons, par contruction, les propriétés suivantes pour tout k :

1) $f(a_k) < r < f(b_k)$
2) $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$
3) $b_k - a_k = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k}$

En particulier les suites (a_k) et (b_k) sont adjacentes, donc convergent vers une limite commune c. Donc $f(a_k)$ et $f(b_k)$ convergent vers $f(c)$. Ainsi, par passage à la limite dans l'inégalité 1), on trouve que $f(c) = r$, ce qu'on voulait. □

Corollaire 2.3.3. *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Cela découle du fait suivant : une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous $a, b \in X$ avec $a < b$, l'intervalle $[a,b]$ est inclus dans X.

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors $f([a,b])$ est un intervalle, et

$$[f(a), f(b)] \subseteq f([a,b])$$

mais en général l'ensemble de gauche est beaucoup plus petit que celui de droite. Penser à une fonction telle que $f(a) = f(b)$. L'égalité est cependant vraie si f est une fonction strictement monotone (c'est le théorème de la bijection, que l'on verra plus loin).

Voici un cas particulier du TVI, démontré en 1817 par Bolzano.

Corollaire 2.3.4 (Théorème de Bolzano)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Démonstration. En effet, $f(a)f(b) < 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, donc que 0 est compris entre les deux. □

Exemple. Tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins une racine réelle.

La propriété des valeurs intermédiaires correspond à une notion intuitive : il est possible de dessiner le graphe de la fonction « d'un seul trait » (c'est-à-dire sans soulever le crayon).

Cette remarque amène à se poser la question : n'y a-t-il pas équivalence entre la propriété des valeurs intermédiaires et la continuité ? La réponse est malheureusement négative. Un contre-exemple nous est donné par la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0, \text{ et } f(0) = 0.$$

Cette fonction n'est pas continue en 0 mais elle satisfait bien la propriété des valeurs intermédiaires pour chaque couple de points dans $\mathbb{R}$.

Plus généralement, le théorème de Darboux affirme que toute fonction $[a, b] \to \mathbb{R}$ qui admet une primitive satisfait la propriété des valeurs intermédiaires.

2.3.2 Théorème des bornes

Théorème 2.3.5 (Théorème des bornes)**.** *Soient a et b deux réels avec $a < b$, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée sur $[a, b]$, et atteint ses bornes.*

Démonstration. Commençons par montrer que f est majorée. Raisonnons par l'absurde : si f n'est pas majorée, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on peut trouver un réel $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) > n$. Comme $[a, b]$ est borné, d'après Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite (x_{n_k}) de (x_n) qui converge vers un certain x. Comme $[a, b]$ est fermé, x appartient à $[a, b]$. Par continuité de f, la suite $f(x_{n_k})$ converge vers $f(x)$. Mais ceci est impossible puisque $f(x_{n_k})$ n'est pas bornée. Donc f est majorée.

Soit M la borne supérieure de l'ensemble $f([a, b])$, nous allons montrer que M est atteint par la fonction f. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $M - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de $f([a, b])$, donc il existe $y_n \in [a, b]$ tel que $f(y_n) > M - \frac{1}{n}$. Comme $f(y_n) \leq M$ pour tout n, on en déduit (par le th. des gendarmes) que la suite $f(y_n)$ converge vers M. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite (y_{n_k}) de (y_n) qui converge vers un certain $y \in [a, b]$. Mais alors, $f(y)$ est égal à la limite de la suite $f(y_{n_k})$, donc $f(y) = M$, ce qu'on voulait.

On montre par la même méthode que f est minorée, et que la borne inférieure est atteinte. $\square$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on sait que $f([a, b])$ est un intervalle. D'après le théorème des bornes, il existe des réels m et M tels que

$$f([a, b]) = [m, M]$$

Le fait que $[a, b]$ soit un intervalle *fermé borné* est très important. Voici quelques exemples :

a) $f(x) = x$ définie sur $[0, +\infty[$ n'est pas majorée.

b) $f(x) = \frac{x}{(1+x)}$ définie sur $[0, +\infty[$ est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $]0, 1]$ n'est pas majorée.

d) $f(x) = 1 - x$ définie sur $]0, 1]$ est majorée mais n'atteint pas sa borne supérieure 1.

2.3.3 Théorème de la bijection

Théorème 2.3.6 (De la bijection)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone. Alors :*

(1) *L'ensemble $J := f(I)$ est un intervalle, dont les bornes sont les limites de f aux bornes de I. La fonction f réalise une bijection entre I et J.*

(2) *La bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue strictement monotone, de même sens de variations que f.*

Démonstration. (1). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f étant continue, l'image de I par f est un intervalle. Comme f est strictement monotone, elle est injective, donc réalise une bijection avec son image. Sachant cela, il est facile de vérifier que les bornes de J sont les limites de f aux bornes de I. (2). On peut supposer que f est strictement croissante. Montrons d'abord que f^{-1} est strictement croissante sur J. Soient a et b dans J tels que $a < b$, et soient $x = f^{-1}(a)$ et $y = f^{-1}(b)$. Alors l'inégalité $x \geq y$ est impossible car elle impliquerait $f(x) \geq f(y)$, c'est-à-dire $a \geq b$. Nous avons donc $x < y$, ce qui prouve que f^{-1} est strictement croissante. Reste à voir que f^{-1} est continue. Soit $y_0 \in J$, et soit $\varepsilon > 0$. Supposons que y_0 soit intérieur à J, alors $f^{-1}(y_0)$ est intérieur à I. Il existe donc a et b dans I tels que l'on ait

$$x_0 - \varepsilon \leq a < f^{-1}(y_0) < b \leq x_0 + \varepsilon$$

Comme f est strictement croissante, il vient :

$$f(a) < y_0 < f(b)$$

Posons $\eta = \min(y_0 - f(a), f(b) - y_0)$, c'est un réel strictement positif qui satisfait par construction :

$$|y - y_0| \leq \eta \Longrightarrow f(a) \leq y \leq f(b)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} f(a) \leq y \leq f(b) &\Longrightarrow a \leq f^{-1}(y) \leq b && \text{par croissance de } f^{-1} \\ &\Longrightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leq \varepsilon && \text{par construction de } a \text{ et } b \end{aligned}$$

Ceci montre que f^{-1} est continue en y_0. Si y_0 est une extrémité de J, on procède de façon analogue. $\square$

Notons que la démonstration de la continuité de f^{-1} n'utilise pas la continuité de f. En fait, on peut montrer le résultat suivant : une bijection monotone entre deux intervalles est toujours continue.

Par contre, le fait qu'une bijection continue ait une réciproque continue n'est pas toujours vrai. L'hypothèse de monotonie est très importante ici.

Cette propriété est une propriété globale : une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en x_0, peut avoir une réciproque non continue en $f(x_0)$.

2.4 Continuité uniforme

Définition 2.4.1. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est uniformément continue sur D si :

$$\begin{gathered} \text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } \delta > 0 \text{ tel que, pour tout } (x, y) \in D^2, \\ |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \end{gathered}$$

ou, avec des quantificateurs,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in D^2, |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Cette nouvelle notion n'est pas une notion locale, contrairement à la notion de continuité. Elle dépend du choix de l'ensemble D.

L'adjectif uniforme signifie que le choix du δ est indépendant du choix de x et de y.

Par comparaison, la continuité de f sur D s'écrit

$$\forall y \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Il est clair que :

$$\begin{aligned} &f \text{ est uniformément continue sur } D \\ \Longrightarrow\ &f \text{ est continue en tout point de } D \end{aligned}$$

mais la réciproque est fausse.

Exemple. La fonction $f(x) = x^2$ définie sur $[0, +\infty[$ n'est pas uniformément continue. En effet, soient x et y dans $[0, +\infty[$, alors nous avons

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = (x + y)|x - y|$$

Ainsi, même si $|x - y|$ est très petit, il suffira de choisir x et y suffisamment grands pour que $|f(x) - f(y)|$ soit plus grand que 1.

Par contre, la même fonction $x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur l'intervalle $[0, 1]$. En effet, pour x et y dans $[0, 1]$, nous avons $x + y \leq 2$ d'où

$$|f(x) - f(y)| = (x + y)|x - y| \leq 2|x - y|$$

Ainsi, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut prendre $\delta = \varepsilon/2$ qui satisfait la propriété voulue.

Théorème 2.4.2 (Théorème de Heine)**.** *Soient a et b deux réels avec $a < b$, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.*

Démonstration. Par l'absurde. Supposons que f ne soit pas uniformément continue sur $[a, b]$. Alors

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$$

Prenons $\delta_n = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient ainsi deux suites (x_n) et (y_n) dans $[a, b]$ telles que

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$$

D'après Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de (x_n) une sous-suite convergente, notée $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Comme $[a, b]$ est fermé, la limite ℓ de (x_{n_k}) appartient à $[a, b]$. De plus, comme

$$|x_{n_k} - y_{n_k}| \leq \frac{1}{n_k}$$

on en déduit que (y_{n_k}) converge également vers ℓ. Mais alors, les suites $f(x_{n_k})$ et $f(y_{n_k})$ convergent vers $f(\ell)$, ce qui contredit le fait que

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| > \varepsilon_0$$

Le résultat en découle. $\square$