Corrigé du TD n° 11

Exercice 1
Soient f et g deux fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = g(x)$$

Montrer que $f = g$.

Réponse : Rappelons d'abord le résultat suivant : **tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels**, autrement dit l'adhérence de $\mathbb{Q}$ est égale à $\mathbb{R}$ (on dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$). Pour justifier rigoureusement ce résultat, soit α un nombre réel, alors la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{\lfloor 10^n \alpha \rfloor}{10^n}$$

est une suite de nombres rationnels (et même décimaux) qui converge vers α. En effet, par définition de la partie entière nous avons :

$$10^n \alpha \leq \lfloor 10^n \alpha \rfloor < 10^n \alpha + 1$$

d'où :

$$\alpha \leq u_n < \alpha + \frac{1}{10^n}$$

ce qui n'est pas très étonnant : u_n est la valeur approchée par défaut à 10^{-n} près de α. Le théorème des gendarmes montre que (u_n) converge vers α.

Passons à la résolution de l'exercice proprement dit. Soit α un réel, et soit (u_n) une suite de nombres rationnels qui converge vers α. Alors, par continuité de f, la suite $f(u_n)$ converge vers $f(\alpha)$. De même, par continuité de g, la suite $g(u_n)$ converge vers $g(\alpha)$. Mais u_n est un nombre rationnel, donc $f(u_n) = g(u_n)$ pour tout n. Par unicité de la limite d'une suite, on en déduit que $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Exercice 2

1. Montrer que, pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|).$$

Réponse : On distingue deux cas :
– ou bien $a \geq b$, dans ce cas $a - b$ est positif ou nul, donc $|a - b| = a - b$. Par conséquent :

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b + a - b) = a = \max(a, b)$$

– ou bien $a < b$, dans ce cas $a - b$ est strictement négatif, donc $|a - b| = -a + b$. Il en résulte que :

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b - a + b) = b = \max(a, b)$$

Dans tous les cas la formule est bien vérifiée.

2. Soient f et g deux fonctions continues $D \to \mathbb{R}$. Soit $\max(f, g)$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} \max(f, g) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \max(f(x), g(x)) \end{aligned}$$

Montrer que cette fonction est continue sur D.

Réponse : D'après la question précédente, nous avons :

$$\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|).$$

Or la fonction $f-g$ est continue (comme différence de deux fonctions continues) et la fonction valeur absolue est continue, donc la fonction $|f-g|$ est continue (comme composée de fonctions continues). Finalement, $f+g+|f-g|$ est la somme de trois fonctions continues, donc est continue, ce qui montre que $\max(f,g)$ est continue.

Exercice 3

1. Montrer que l'équation $x^5 = x^2+2$ a au moins une solution sur $]0,2[$.

   Réponse : Soit $f(x) = x^5 - x^2 - 2$, alors notre équation se réécrit $f(x) = 0$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = -2$, $f(2) = 26$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (TVI), comme 0 est compris entre $f(0)$ et $f(2)$, il existe un réel α compris entre 0 et 2 tel que $f(\alpha) = 0$. Comme $f(0)$ et $f(2)$ sont tous les deux non nuls, ce réel α appartient à l'intervalle ouvert $]0,2[$.
2. Montrer que le polynôme x^3+2x-1 a une unique racine qui appartient à l'intervalle $]0,1[$.

   Réponse : Soit $f(x) = x^3+2x-1$. La fonction f est continue dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée $f'(x) = 3x^2+2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de la bijection elle réalise une bijection entre l'intervalle $]0,1[$ et l'intervalle $]f(0), f(1)[=]-1,2[$. Ainsi, pour tout $r \in]-1,2[$, il existe un unique $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = r$, d'où le résultat en prenant $r = 0$.
3. Montrer que l'équation $x^2(\cos x)^5 + x\sin x + 1 = 0$ admet au moins une solution réelle.

   Réponse : La fonction $f : x \mapsto x^2(\cos x)^5 + x\sin x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, on calcule que $f(0) = 1$ et que $f(\pi) = 1-\pi^2$. Comme $1-\pi^2$ est négatif, on en déduit d'après le TVI qu'il existe un réel β compris entre 0 et π tel que $f(\beta) = 0$.

Exercice 4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in]0,+\infty[$. Démontrer, en utilisant le théorème de la bijection, que le polynôme $P(X) = X^n - \alpha$ admet une unique racine dans $]0,+\infty[$.

Réponse : La fonction $P : x \mapsto x^n - \alpha$ est continue dérivable sur $]0,+\infty[$. Sa dérivée $x \mapsto nx^{n-1}$ est strictement positive sur $]0,+\infty[$. Par conséquent, P est strictement croissante, donc, d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection entre $]0,+\infty[$ et son image, qui est $]-\alpha,+\infty[$. En particulier, il existe un unique réel $c \in]0,+\infty[$ tel que $P(c) = 0$.

Exercice 5

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair. Montrer que P admet une racine réelle.

Réponse : Soit $n = 2k+1$ le degré de P, alors le terme de plus haut degré de P est de la forme ax^{2k+1} avec $a \neq 0$. D'après le cours

$$P(x) \sim_{+\infty} ax^{2k+1}$$

On en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} ax^{2k+1} = a \times (+\infty)$$

Le même équivalent étant valable en $-\infty$, il vient

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} ax^{2k+1} = a \times (-\infty)$$

Or $a\times(+\infty)$ et $a\times(-\infty)$ sont deux infinis de signes contraires. La fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires prouve que l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction P est l'intervalle $]-\infty,+\infty[$, autrement dit la fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est surjective (attention : elle n'est pas injective en général). En particulier, 0 admet au moins un antécédent par P, ce qu'on voulait.

Exercice 6

Soit $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction continue, qui tend vers 0 quand $x \to +\infty$.

1. On distingue deux cas : ou bien f est la fonction nulle, dans ce cas il n'y a rien à montrer, ou bien f n'est pas toujours nulle, dans ce cas il existe $x_0 \in [0, +\infty[$ tel que $f(x_0) > 0$. D'autre part, on sait que f tend vers 0 en $+\infty$, donc en appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, on trouve qu'il existe un réel $A > 0$ tel que

$$\forall x \in [0, +\infty[, x \geq A \Longrightarrow |f(x)| \leq \frac{f(x_0)}{2}$$

Comme f est à valeurs dans $[0, +\infty[$, cela se reformule en :

$$\forall x \in [A, +\infty[, \quad 0 \leq f(x) \leq \frac{f(x_0)}{2} \tag{1}$$

Donc f est bornée sur l'intervalle $[A, +\infty[$. D'autre part, le théorème des bornes montre que f est bornée sur l'intervalle $[0, A]$, plus précisément il existe des réels $0 \leq m \leq M$ tels que

$$f([0, A]) = [m, M].$$

Il en résulte que f est majorée sur $[0, +\infty[$ par $\max\left(M, \frac{f(x_0)}{2}\right)$. Mais on constate que x_0 appartient à $[0, A]$ (sinon la propriété (1) serait contredite), donc $M \geq f(x_0) > \frac{f(x_0)}{2}$. Il en résulte que f est majorée par M sur $[0, +\infty[$. Or, toujours d'après le théorème de bornes, il existe $t \in [0, A]$ tel que $f(t) = M$, donc f atteint sa borne supérieure.

2. La fonction f n'atteint pas forcément sa borne inférieure. Par exemple, la fonction

$$\begin{aligned} f : [0, +\infty[&\longrightarrow [0, +\infty[\\ x &\longmapsto \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

satisfait les hypothèses de l'énoncé, mais n'atteint pas sa borne inférieure (qui est 0).

Exercice 7

On considère la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}.$$

a) Soit $x \in]0, 1[$, alors $0 < x^2 + x < x^2 + 1$ d'où $0 < f(x) < 1$. Donc $]0, 1[$ est stable par f. Un raisonnement analogue montre que $]1, +\infty[$ est stable par f.

b) D'après ce qui précède, étant donné $x_0 \in]0, 1[$, la suite (x_n) définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ est bien définie, et à valeurs dans $]0, 1[$.

c) Pour montrer que (x_n) est croissante, il suffit de montrer que

$$\forall x \in]0, 1[, \quad f(x) > x$$

Or nous avons

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x+1}{x^2+1}$$

Si x appartient à $]0, 1[$, alors $x^2 < x$ donc $0 < x^2 + 1 < x + 1$. Il en résulte que $\frac{f(x)}{x}$ est strictement supérieur à 1, d'où le résultat. La suite (x_n) est strictement croissante et majorée par 1, elle converge donc vers une certaine limite $\ell \in]0, 1]$. Par continuité de f, cette limite satisfait $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire est un point fixe de f. Or l'équation $f(\ell) = \ell$ s'écrit

$$\frac{\ell^2 + \ell}{\ell^2 + 1} = \ell$$

Comme $\ell \neq 0$, on peut diviser par ℓ les deux membres de l'équation :

$$\frac{\ell + 1}{\ell^2 + 1} = 1$$

c'est-à-dire :

$$\ell + 1 = \ell^2 + 1$$

d'où $\ell^2 - \ell = 0$, équation dont les solutions sont 0 et 1. Comme $\ell \neq 0$, on en déduit que $\ell = 1$.

Exercice 8

1. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.
   Réponse : Considérons la fonction g définie par

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) - x \end{aligned}$$

   Comme f est continue, g l'est aussi. Il est clair par construction de g que notre problème se ramène à montrer l'existence d'un réel $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$. D'autre part :

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \qquad \text{car } f(a) \text{ appartient à } [a, b]\text{, en particulier } f(a) \geq a$$

   De même :

$$g(b) = f(b) - b \leq 0 \qquad \text{car } f(b) \text{ appartient à } [a, b]\text{, en particulier } f(b) \leq b$$

   Donc 0 est compris entre $g(a)$ et $g(b)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$, CQFD.
2. Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une solution comprise entre 0 et 1.
   Réponse : Comme $\cos([0, \frac{\pi}{2}]) = [0, 1]$ et que $[0, 1]$ est inclus dans $[0, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit que $\cos([0, 1])$ est inclus dans $[0, 1]$. Il suffit simplement d'appliquer le résultat de la question précédente à la fonction $\cos : [0, 1] \to [0, 1]$.
3. Donner un exemple de fonction continue $g :]0, 1[\to]0, 1[$ qui n'admet pas de point fixe.
   Réponse : La fonction $x \mapsto x^2$ convient.

Exercice 9

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Si I est ouvert alors $f(I)$ est ouvert.
   Réponse : C'est faux. Par exemple, $\sin(]0, 2\pi[) = [-1, 1]$.
2. Si I est fermé alors $f(I)$ est fermé.
   Réponse : C'est faux (mais la question est légèrement hors programme). En effet, l'intervalle $[1, +\infty[$ est fermé (car son complémentaire $]-\infty, 1[$ est ouvert), et la fonction $x \mapsto 1/x$ réalise une bijection continue entre $[1, +\infty[$ et $]0, 1]$, qui n'est pas fermé.
3. Si I est borné, alors $f(I)$ est borné.
   Réponse : C'est faux. Par exemple, l'image de $]0, 1]$ par la fonction $x \mapsto 1/x$ est $[1, +\infty[$.
4. Si I est fermé borné, alors $f(I)$ est fermé borné.
   Réponse : C'est vrai, d'après le théorème des bornes.

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

1. La fonction f est continue. De plus, la fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est strictement croissante, à valeurs positives, sur $[0, +\infty[$. Par conséquent, f est strictement décroissante sur ce même intervalle. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur son image, qui est :

$$f([0, +\infty[) =]\lim_{x \to +\infty} f(x), f(0)] =]0, 1]$$

2. D'après le théorème de la bijection, l'application $f^{-1} :]0,1] \to [0,+\infty[$ est continue, strictement décroissante (car de même sens de variation que f).
3. On calcule que :

$$f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1}{y} - 1}.$$

(pour un calcul plus détaillé d'une bijection réciproque, voir l'exercice suivant).

Exercice 11

1. Soit la fonction $f : [-1,+\infty[\to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

La fonction $x \mapsto x^2+2x+2$ étant strictement croissante sur $[-1,+\infty[$, à valeurs positives, la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2x+2}$ l'est aussi. Par conséquent, la fonction f est strictement décroissante sur $[-1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, la fonction f étant continue strictement décroissante, elle réalise une bijection entre l'intervalle $[-1,+\infty[$ et son image. En outre :

$$f([-1,+\infty[) =]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(-1)] =]0,1].$$

Il nous reste à déterminer la bijection réciproque f^{-1}. Pour cela, on se donne $y \in]0,1]$, et on cherche à déterminer (en fonction de y) l'unique $x \in [-1,+\infty[$ tel que $f(x) = y$. Cette équation s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} = y$$

comme y est strictement positif, cette équation équivaut à :

$$x^2+2x+2 = \frac{1}{y^2}$$

c'est-à-dire :

$$(x+1)^2 = \frac{1}{y^2} - 1$$

(notez bien l'idée de passer à la forme canonique, qui évite la lourdeur de la résolution d'une équation de degré 2 en x dont le discriminant dépend de y !). Comme $x+1$ est positif, on en déduit que

$$x+1 = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}$$

Ainsi :

$$f^{-1}(y) = x = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1} - 1.$$

2. On sait que la fonction tangente réalise une bijection entre $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\mathbb{R}$. Il nous faut donc trouver un intervalle I tel que la fonction $h : x \mapsto x^3$ réalise une bijection entre I et $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On voit bien que cet intervalle est $I =]-\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}[$. Plus précisément, I est l'image de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par la bijection réciproque de la fonction $h : x \mapsto x^3$. On a donc le diagramme suivant

$$]-\sqrt[3]{\tfrac{\pi}{2}}, \sqrt[3]{\tfrac{\pi}{2}}[\xrightarrow[h:x\mapsto x^3]{}]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\xrightarrow[\tan]{} \mathbb{R}$$

dans lequel les deux fonctions sont bijectives. Donc leur composée $g = \tan \circ h$ est bijective, et la fonction réciproque g^{-1} est obtenue en composant les fonctions réciproques dans l'autre sens, c'est-à-dire :

$$g^{-1} = h^{-1} \circ \arctan$$

Plus explicitement :

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{\arctan y} & \text{si } y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-\arctan y} & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

Exercice 12
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1. Pour déterminer l'application $f \circ f$ on distingue deux cas
   - si $x \in \mathbb{Q}$, alors $f(x) = x$, donc $f(f(x)) = f(x) = x$.
   - si $x \notin \mathbb{Q}$, alors $f(x) = 1 - x$. De plus, x étant irrationnel, $1 - x$ l'est aussi, donc

   $$f(1 - x) = 1 - (1 - x) = x.$$

   Dans tous les cas, on a montré que $f(f(x)) = x$, c'est-à-dire que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Rappelons (voir le cours d'algèbre) que, si f et g sont deux fonctions telles que $f \circ g = \mathrm{id}$ et $g \circ f = \mathrm{id}$, alors f et g sont bijectives, et réciproques l'une de l'autre. Ce résultat s'applique bien dans notre cas, en prenant les deux fonctions égales à f. On en déduit que f est bijective, et que $f^{-1} = f$.
2. Pour voir que f n'est pas monotone, on doit montrer qu'elle n'est ni croissante, ni décroissante. Nous avons :

   $$f(0) = 0, \quad f(1) = 1 \quad \text{et} \quad f(\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2} \quad (\text{car } \sqrt{2} \text{ est irrationnel}).$$

   d'où :

   $$f(0) < f(1) \quad \text{et} \quad f(1) > f(\sqrt{2})$$

   La première inégalité montre que f n'est pas décroissante, la seconde montre que f n'est pas croissante. Il reste à voir que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Pour cela, il suffit de trouver un point x_0 où elle n'est pas continue. Choisissons $x_0 = \sqrt{2}$. Rappelons que $f(\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}$. D'autre part, soit (u_n) une suite de nombres rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$ (une telle suite existe d'après l'ex. 1), alors $f(u_n) = u_n$ pour tout n, donc la suite $f(u_n)$ converge vers $\sqrt{2}$, autrement dit :

   $$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \sqrt{2} \neq f(\sqrt{2}).$$

   D'après le critère séquentiel, f n'est donc pas continue en $\sqrt{2}$.

Exercice 13
Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = h\left(\frac{x}{2}\right).$$

Montrer que h est constante.
Réponse : On se donne un réel x. Par une récurrence immédiate, on voit que :

$$h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right) \qquad \text{pour tout entier } n \geq 1.$$

Comme la suite $\left(\frac{x}{2^n}\right)$ converge vers 0, par continuité de h la suite $h\left(\frac{x}{2^n}\right)$ converge vers $h(0)$. Or la suite $h\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est constante égale à $h(x)$ d'après ce qui précède. Donc $h(x) = h(0)$. Ainsi nous avons démontré que la fonction h est constante, égale à $h(0)$.

Exercice 14
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$, et soit $p \geq 1$ un entier fixé. Montrer qu'il existe un réel $x_p \in [0, 1]$ tel que

$$f\left(x_p + \frac{1}{p}\right) = f(x_p).$$

Réponse : On considère la fonction h définie par :

$$\begin{aligned} h : \left[0, 1-\frac{1}{p}\right] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f\left(x+\frac{1}{p}\right) - f(x) \end{aligned}$$

Alors h est continue, et le problème de départ équivaut à trouver un réel x_p tel que $h(x_p) = 0$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} h(0) &= f\left(\frac{1}{p}\right) - f(0) \\ h\left(\frac{1}{p}\right) &= f\left(\frac{2}{p}\right) - f\left(\frac{1}{p}\right) \\ &\vdots \\ h\left(\frac{p-1}{p}\right) &= f(1) - f\left(\frac{p-1}{p}\right) \end{aligned}$$

En sommant le tout, on trouve que :

$$\sum_{k=0}^{p-1} h\left(\frac{k}{p}\right) = f(1) - f(0) = 0.$$

On en déduit qu'il existe deux entiers i et j avec $i < j$ tels que 0 soit compris entre $h\left(\frac{i}{p}\right)$ et $h\left(\frac{j}{p}\right)$. En effet, si une somme de termes est nulle, alors ou bien tous les termes sont nuls, ou bien certains sont positifs et d'autres sont négatifs. Il suffit alors d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction h sur l'intervalle $\left[\frac{i}{p}, \frac{j}{p}\right]$.