Le théorème de Marcinkiewicz

Jean-François Coulombel

Cet exposé suit de très près le livre d'Elias Stein [2] et les notes de cours de Guy Métivier [1]. On se fixe un espace mesuré $(X,\mathcal{A},\mu)$, qui sera typiquement $\mathbb{R}^d$ ou un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Si $f : X \to \mathbb{C}$ est une application mesurable, pour tout réel $t \geq 0$, on définit

$$\lambda_f(t) := \mu\left[\{x \in X : |f(x)| > t\}\right] \in [0, +\infty] \, .$$

Il est clair que λ_f est une fonction décroissante, continue à droite. On rappelle quelques propriétés élémentaires de la fonction λ_f:

Lemme 1. i) *Soit* $0 < p < +\infty$. *Alors*

$$\int_X |f|^p \, d\mu = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \, \lambda_f(t) \, dt \, .$$

ii) *Soient* $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p(X)$ *et* $t > 0$. *Alors on a l'inégalité de Chebychev*

$$\lambda_f(t) \leq \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{t} \right)^p \, .$$

iii) *On a* $f \in L^\infty(X)$ *si et seulement si* $\lambda_f(t) = 0$ *pour* t *suffisamment grand.*

L'appartenance d'une fonction mesurable f à un espace L^p est donc fortement liée à la décroissance de la fonction λ_f. Nous introduisons maintenant deux classes d'applications. Précisons que les applications que nous allons considérer ne sont pas forcément des applications linéaires.

Définition 1. *On se donne* p *et* q *dans* $[1, +\infty]$. *Une application* $T : L^p(X) \to L^q(X)$ *sera dite de type fort* (p,q) *s'il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\forall \, f \in L^p(X) \, , \quad \|Tf\|_{L^q} \leq C \, \|f\|_{L^p} \, .$$

Pour une application linéaire, cette définition coïncide bien sûr avec la notion d'application linéaire continue de L^p dans L^q.

Définition 2. *On se donne* p *et* q *vérifiant* $1 \leq p \leq +\infty$ *et* $1 \leq q < +\infty$. *Une application* $T : L^p(X) \to L^q(X)$ *sera dite de type faible* (p,q) *s'il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\forall \, f \in L^p(X) \, , \quad \forall \, t > 0 \, , \quad \lambda_{Tf}(t) \leq \left(\frac{C \, \|f\|_{L^p}}{t} \right)^q \, .$$

On dira que T *est de type faible* $(p, +\infty)$ *si* T *est de type fort* $(p, +\infty)$.

Le lemme 1 assure que toute application de type fort (p,q) est automatiquement de type faible (p,q), ce qui justifie la terminologie employée. On se donne alors p_0,p_1,q_0,q_1 vérifiant

$$1 \leq p_0 \leq q_0 < +\infty\,, \quad 1 \leq p_1 \leq q_1 \leq +\infty\,, \quad p_0 < p_1 \quad \text{et} \quad q_0 < q_1\,.$$

Le cas $q_0 > q_1$ se traite de façon identique et se révèle également utile dans la pratique. Nous nous restreindrons au cas $q_0 < q_1$. Le théorème de Marcinkiewicz s'énonce alors de la manière suivante:

Théorème 1. *Soit T une application de l'ensemble $\{$fonctions mesurables $X \to \mathbb{C}\}$ dans lui-même vérifiant*

$$\forall\, f,g\,, \quad \forall\, x \in X\,, \quad |T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)|\,. \tag{1}$$

Si T est de type faible (p_0,q_0) et de type faible (p_1,q_1), alors T est de type fort (p,q) pour tous les couples (p,q) définis par

$$\frac{1}{p} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}\,, \quad \frac{1}{q} := \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}\,, \quad \theta \in]0,1[\,. \tag{2}$$

Par exemple, si T est de type faible $(1,1)$ et de type fort $(+\infty,+\infty)$, alors T est de type fort (p,p) pour tout $p > 1$.

Nous allons tout d'abord établir le résultat suivant:

Lemme 2. *Soit h une fonction positive décroissante sur $\mathbb{R}^+$. On se donne r,α_1,α_2 tels que*

$$0 < r \leq +\infty\,, \quad 0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq +\infty\,.$$

Alors il existe une constante C ne dépendant pas de h telle que

$$\left[\int_0^{+\infty} \Big(t^{1/r}h(t)\Big)^{\alpha_2}\, \frac{dt}{t}\right]^{1/\alpha_2} \leq C \left[\int_0^{+\infty} \Big(t^{1/r}h(t)\Big)^{\alpha_1}\, \frac{dt}{t}\right]^{1/\alpha_1}\,.$$

Dans le cas $\alpha_2 = +\infty$, le membre de gauche est à comprendre comme $\sup_{t>0} t^{1/r}h(t)$.

Preuve du lemme 2

Si $\alpha_1 = \alpha_2$, l'inégalité est triviale. On suppose donc $\alpha_1 < \alpha_2$, ce qui implique $\alpha_1 < +\infty$.

Soit $t > 0$. Comme h^{α_1} est décroissante, on a

$$\int_{t/2}^{t} \Big(s^{1/r}h(s)\Big)^{\alpha_1}\, \frac{ds}{s} \geq h(t)^{\alpha_1} \int_{t/2}^{t} s^{\alpha_1/r-1}\, ds$$

et cette dernière intégrale est minorée par $\mathrm{C^{te}}\, t^{\alpha_1/r}$ car l'intégrande est une fonction monotone. On obtient ainsi l'estimation

$$\Big(t^{1/r}h(t)\Big)^{\alpha_1} \leq \mathrm{C^{te}} \int_{t/2}^{t} \Big(s^{1/r}h(s)\Big)^{\alpha_1}\, \frac{ds}{s} \leq \mathrm{C^{te}} \int_0^{+\infty} \Big(s^{1/r}h(s)\Big)^{\alpha_1}\, \frac{ds}{s}\,,$$

et on a donc montré le lemme dans le cas $\alpha_2 = +\infty$. Si $\alpha_2 < +\infty$, on pose

$$I := \int_0^{+\infty} \Big(t^{1/r}h(t)\Big)^{\alpha_1}\, \frac{dt}{t}\,.$$

On écrit alors

$$\int_0^{+\infty} \left(t^{1/r}h(t)\right)^{\alpha_2} \frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} \left(t^{1/r}h(t)\right)^{\alpha_2-\alpha_1} \left(t^{1/r}h(t)\right)^{\alpha_1} \frac{dt}{t}$$
$$\leq \mathrm{C}^{\mathrm{te}}\, I^{(\alpha_2-\alpha_1)/\alpha_1} \int_0^{+\infty} \left(t^{1/r}h(t)\right)^{\alpha_1} \frac{dt}{t} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}\, I^{\alpha_2/\alpha_1}\,,$$

ce qui donne le résultat annoncé.

□

Par changement de variable ($t \to 1/t$), on obtient le résultat analogue pour les fonctions positives croissantes:

Lemme 3. *Soit g une fonction positive croissante sur $\mathbb{R}^+$. On se donne r,α_1,α_2 tels que*

$$0 < r \leq +\infty\,, \quad 0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq +\infty\,.$$

Alors il existe une constante C ne dépendant pas de g telle que

$$\left[\int_0^{+\infty} \left(t^{-1/r}g(t)\right)^{\alpha_2} \frac{dt}{t}\right]^{1/\alpha_2} \leq C \left[\int_0^{+\infty} \left(t^{-1/r}g(t)\right)^{\alpha_1} \frac{dt}{t}\right]^{1/\alpha_1}\,,$$

le membre de gauche étant à nouveau à comprendre comme $\sup_{t>0} t^{-1/r}g(t)$ *si $\alpha_2 = +\infty$.*

Preuve du théorème dans le cas $q_1 < +\infty$

On se fixe une fonction $f \in L^p(X)$, avec p donné par (2). Notons que les hypothèses sur les p_i et q_i assurent que $p \in]p_0,p_1[$ et $q \in]q_0,q_1[$. On se donne $\alpha > 0$ (à fixer plus tard) et on pose

$$f_0(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \geq \alpha, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f_1 := f - f_0\,.$$

On obtient alors

$$\int_X |f_0|^{p_0}\, d\mu = \int_{\{|f|>\alpha\}} |f|^{p_0}\, d\mu \leq \alpha^{p_0-p}\, \|f\|_{L^p}^p\,,$$
$$\int_X |f_1|^{p_1}\, d\mu = \int_{\{|f|\leq\alpha\}} |f|^{p_1}\, d\mu \leq \alpha^{p_1-p}\, \|f\|_{L^p}^p\,,$$

ce qui montre, au passage, l'inclusion $L^p \subset L^{p_0} + L^{p_1}$. Comme T est de type faible (p_i,q_i), $i = 0,1$, on a

$$\lambda_{Tf_i}(t) \leq \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \left(\frac{\|f_i\|_{L^{p_i}}}{t}\right)^{q_i}\,, \quad i = 0,1\,. \tag{3}$$

En utilisant (1), on sait que

$$\forall\, x \in X\,, \quad |Tf(x)| \leq |Tf_0(x)| + |Tf_1(x)|\,,$$

et on en déduit l'inégalité

$$\forall\, t > 0\,, \quad \lambda_{Tf}(t) \leq \lambda_{Tf_0}(t/2) + \lambda_{Tf_1}(t/2)\,. \tag{4}$$

On choisit $\alpha = \gamma t^\delta$ où γ et δ sont des réels strictement positifs que nous fixerons de façon adéquate. En combinant (3) et (4), on obtient

$$\forall\, t > 0\,, \quad \lambda_{Tf}(t) \leq \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \left[t^{-q_0}\varphi_0(t)^{q_0/p_0} + t^{-q_1}\varphi_1(t)^{q_1/p_1}\right] \tag{5}$$

où l'on a posé

$$\varphi_0(t) := \int_{\{|f|>\gamma t^\delta\}} |f|^{p_0}\, d\mu \quad \text{et} \quad \varphi_1(t) := \int_{\{|f|\le\gamma t^\delta\}} |f|^{p_1}\, d\mu\,.$$

Il est clair que φ_0 est une fonction positive décroissante et que φ_1 est une fonction positive croissante. Le lemme 2 assure donc[1] qu'on a

$$\int_0^{+\infty} t^{q-q_0-1}\varphi_0(t)^{q_0/p_0}\, dt \le \mathrm{C^{te}} \left(\int_0^{+\infty} t^{(q-q_0)p_0/q_0-1}\varphi_0(t)\, dt\right)^{q_0/p_0}\,.$$

En appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, on trouve

$$\int_0^{+\infty} t^{(q-q_0)p_0/q_0-1}\varphi_0(t)\, dt = \int_X |f(x)|^{p_0} \int_0^{(|f(x)|/\gamma)^{1/\delta}} t^{(q/q_0-1)p_0-1}\, dt\, d\mu(x)\,.$$

On décide maintenant de choisir

$$\delta := \frac{q-q_0}{p-p_0}\,\frac{p_0}{q_0} > 0\,,$$

ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} t^{(q/q_0-1)p_0-1}\varphi_0(t)\, dt = \mathrm{C^{te}}\, \gamma^{p_0-p} \int_X |f|^p\, d\mu\,. \tag{6}$$

De façon totalement similaire, le lemme 3 donne

$$\int_0^{+\infty} t^{q-q_1-1}\varphi_1(t)^{q_1/p_1}\, dt \le \mathrm{C^{te}} \left(\int_0^{+\infty} t^{(q-q_1)p_1/q_1-1}\varphi_1(t)\, dt\right)^{q_1/p_1}\,,$$

et à cause de (2), on a également

$$\delta = \frac{q-q_1}{p-p_1}\,\frac{p_1}{q_1}\,.$$

Un moyen simple de se convaincre de cette relation est d'écrire que les points $(1/p,1/q)$, $(1/p_0,1/q_0)$ et $(1/p_1,1/q_1)$ sont alignés. Cette propriété de δ donne la relation

$$\int_0^{+\infty} t^{(q-q_1)p_1/q_1-1}\varphi_1(t)\, dt = \mathrm{C^{te}}\, \gamma^{p_1-p} \int_X |f|^p\, d\mu\,. \tag{7}$$

En regroupant (6) et (7), on a montré

$$\int_0^{+\infty} t^{q-1}\lambda_{Tf}(t)\, dt \le \mathrm{C^{te}} \left[\left(\gamma^{p_0-p}\,\|f\|_{L^p}^p\right)^{q_0/p_0} + \left(\gamma^{p_1-p}\,\|f\|_{L^p}^p\right)^{q_1/p_1}\right]\,.$$

On choisit alors $\gamma := \|f\|_{L^p}^{1-\delta}$, et on obtient en fin de compte

$$\int_0^{+\infty} t^{q-1}\lambda_{Tf}(t)\, dt \le \mathrm{C^{te}}\, \|f\|_{L^p}^q\,,$$

ce qui conclut la preuve.

1. Prendre $1/r = q - q_0 > 0$, $\alpha_2 = 1$ et $\alpha_1 = p_0/q_0$.

Preuve du théorème dans le cas $q_1 = +\infty$

On fait le même découpage que précédemment avec $f = f_0 + f_1$ et $\alpha = \gamma t^\delta$. On choisit encore

$$\delta := \frac{q - q_0}{p - p_0}\,\frac{p_0}{q_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } p_1 = +\infty, \\ \dfrac{p_1}{p_1 - p} & \text{si } p_1 < +\infty. \end{cases}$$

On obtient alors

$$\|f_0\|_{L^{p_0}}^{p_0} = \varphi_0(t) := \int_{\{|f| > \gamma t^\delta\}} |f(x)|^{p_0}\, d\mu(x)\,,$$
$$\|f_1\|_{L^{p_1}} \leq (\gamma t^\delta)^{(1 - p_1/p)}\, \|f\|_{L^p}^{p/p_1} = t\,\gamma'\,.$$

Par hypothèse, on a

$$\lambda_{Tf_0}(t/2) \leq \mathrm{C^{te}} \left(\frac{\|f_0\|_{L^{p_0}}}{t} \right)^{q_0} \quad \text{et} \quad \|Tf_1\|_{L^\infty} \leq \mathrm{C^{te}}\, \|f_1\|_{L^{p_1}}\,.$$

On aura notamment $\lambda_{Tf_1}(t/2) = 0$ pour tout $t > 0$ dès que $t/2 \geq \mathrm{C^{te}}\, t\,\gamma'$. Ceci sera toujours le cas si γ est choisi suffisamment petit. Avec un tel choix de γ, l'inégalité (4) devient

$$\lambda_{Tf}(t) \leq \lambda_{Tf_0}(t/2)$$

et en suivant la même démarche que précédemment, nous aboutissons à une inégalité du type

$$\int_0^{+\infty} t^{q-1} \lambda_{Tf}(t)\, dt \leq \mathrm{C^{te}} \left(\gamma^{p_0 - p}\, \|f\|_{L^p}^p \right)^{q_0/p_0}\,.$$

En choisissant $\gamma = \epsilon\, \|f\|_{L^p}^{1-\delta}$, avec $\epsilon > 0$ suffisamment petit, on obtient le résultat annoncé. Cela conclut la preuve du théorème.

□

Références

[1] Guy Métivier. *Intégrales singulières.* Cours de DEA, Rennes, 1982.

[2] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.