Lemme de Cotlar

Jean-François Coulombel

Le lemme de Cotlar est à la base de nombreux résultats de continuité d'opérateurs dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On renvoie par exemple à [1] ou [2] pour quelques utilisations plus ou moins "exotiques". Nous détaillerons un exemple qui nous a paru significatif. Le lemme donne une estimation des sommes "quasi-orthogonales" d'opérateurs.

On se donne un espace de Hilbert H et une suite d'opérateurs linéaires continus $T_j \in \mathcal{L}(H)$, $j \in \mathbb{Z}$. On suppose qu'il existe une suite positive $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$ telle que

$$\forall\, j,k \in \mathbb{Z}\,, \quad \|T_j^* T_k\| \le \gamma(j-k)^2 \quad \text{et} \quad \|T_j T_k^*\| \le \gamma(j-k)^2\,. \tag{1}$$

La norme sur $\mathcal{L}(H)$ est la norme d'opérateur définie à partir de la norme hilbertienne sur H. On a alors le résultat suivant:

Lemme 1 (Cotlar). *Pour toute partie finie $I \subset \mathbb{Z}$, on a*

$$\|\sum_{i\in I} T_i\| \le \|\gamma\|_{\ell^1}\,.$$

Preuve du lemme 1

On se donne une partie finie $I \subset \mathbb{Z}$ et on note

$$T := \sum_{i \in I} T_i \in \mathcal{L}(H)\,.$$

Rappelons ce fait général dans les espaces de Hilbert: si $u \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur autoadjoint, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\|u^m\| = \|u\|^m\,.$$

Pour $m = 0$ et $m = 1$, le résultat est clair. Il est également clair que $\|u^2\| \le \|u\|^2$ (propriété de norme d'opérateur); pour l'inégalité dans l'autre sens, on écrit

$$\|u\|^2 = \sup_{x\neq 0} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2} = \sup_{x \neq 0} \frac{\langle u^* u(x), x\rangle}{|x|^2} \le \sup_{x\neq 0} \frac{|u^2(x)|}{|x|} = \|u^2\|\,.$$

Par récurrence, on obtient l'égalité annoncée pour toutes les puissances de 2. Un nouveau raisonnement par récurrence (sur k) donne l'égalité annoncée pour les entiers $m \le 2^k$ et donc pour tous les entiers.

On applique ce résultat à T^*T. Cela donne

$$\|T\|^{2m} = \|T^*T\|^m = \|(T^*T)^m\|\,.$$

D'après la définition de T, on a

$$(T^*T)^m = \sum_{j_1 \in I} \cdots \sum_{j_{2m} \in I} T_{j_1}^* T_{j_2} \cdots T_{j_{2m-1}}^* T_{j_{2m}}\,,$$

et nous allons estimer séparément chacun des termes dans cette somme. On écrit

$$T_{j_1}^* T_{j_2} \cdots T_{j_{2m-1}}^* T_{j_{2m}} = (T_{j_1}^* T_{j_2}) \cdots (T_{j_{2m-1}}^* T_{j_{2m}}) \tag{2a}$$
$$= T_{j_1}^* (T_{j_2} T_{j_3}^*) \cdots (T_{j_{2m-2}} T_{j_{2m-1}}^*) T_{j_{2m}} \,. \tag{2b}$$

De l'égalité (2a) et de (1), il vient

$$\|T_{j_1}^* T_{j_2} \cdots T_{j_{2m-1}}^* T_{j_{2m}}\| \leq \gamma(j_1 - j_2)^2 \, \gamma(j_3 - j_4)^2 \, \cdots \, \gamma(j_{2m-1} - j_{2m})^2 \,,$$

tandis que (2b) et (1) donnent

$$\begin{aligned} \|T_{j_1}^* T_{j_2} \cdots T_{j_{2m-1}}^* T_{j_{2m}}\| &\leq \|T_{j_1}\| \, \|T_{j_{2m}}\| \, \gamma(j_2 - j_3)^2 \cdots \gamma(j_{2m-2} - j_{2m-1})^2 \\ &\leq \gamma(0)^2 \, \gamma(j_2 - j_3)^2 \cdots \, \gamma(j_{2m-2} - j_{2m-1})^2 \,. \end{aligned}$$

En prenant la moyenne géométrique de ces deux inégalités, on obtient

$$\|T_{j_1}^* T_{j_2} \cdots T_{j_{2m-1}}^* T_{j_{2m}}\| \leq \gamma(0) \, \gamma(j_1 - j_2) \, \gamma(j_2 - j_3) \cdots \, \gamma(j_{2m-2} - j_{2m-1}) \, \gamma(j_{2m-1} - j_{2m}) \,.$$

On arrive ainsi à l'inégalité

$$\begin{aligned} \|T\|^{2m} &\leq \gamma(0) \sum_{j_1, \cdots, j_{2m}} \gamma(j_1 - j_2) \, \gamma(j_2 - j_3) \cdots \, \gamma(j_{2m-2} - j_{2m-1}) \, \gamma(j_{2m-1} - j_{2m}) \\ &\leq \gamma(0) \|\gamma\|_{\ell^1}^{2m-1} \, \mathrm{Card}\,(I) \leq \|\gamma\|_{\ell^1}^{2m} \, \mathrm{Card}\,(I) \,. \end{aligned}$$

En prenant la puissance $1/2m$-ième de cette inégalité et en faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient bien $\|T\| \leq \|\gamma\|_{\ell^1}$.

□

Remarquons que le résultat reste en tout point identique si l'on prend une famille d'opérateurs indéxée par $\mathbb{Z}^d$ avec une suite positive $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z}^d)$. La preuve est exactement la même.

Nous allons maintenant voir en détails comment le lemme de Cotlar permet de montrer la continuité dans L^2 de nombreux opérateurs pseudodifférentiels. Commençons par la définition suivante:

Définition 1. *Une fonction $a : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ sera appellée symbole pseudodifférentiel (de degré 0) si a est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et si pour tous multientiers $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^d$, il existe une constante $C_{\alpha,\beta} > 0$ telle que*

$$\forall\, (x,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \,, \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a\,(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta} \,.$$

Si a est un symbole pseudodifférentiel, il définit naturellement un opérateur linéaire continu $\mathrm{Op}(a)$ sur la classe de Schwartz par la formule suivante:

$$\mathrm{Op}(a)\, \varphi(x) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \, a(x,\xi) \, \widehat{\varphi}(\xi) \, d\xi \,, \qquad \widehat{\varphi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\cdot\xi} \, \varphi(y) \, dy \,.$$

Nous allons montrer que $\mathrm{Op}(a)$ se prolonge de manière unique en un opérateur linéaire continu sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ (on dira que $\mathrm{Op}(a)$ est l'opérateur pseudodifférentiel associé au symbole a). Pour cela, on se fixe une fonction positive $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ vérifiant

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d \,, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \chi(x - j) = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{Supp}\,(\chi) \subset \{x \in \mathbb{R}^d \,:\, |x| \leq 2\} \,.$$

Pour tout $i=(i_1,i_2)\in\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d$, on pose

$$a_i(x,\xi)=a(x,\xi)\,\chi(x-i_1)\,\chi(\xi-i_2)\,.$$

Le théorème de convergence dominée assure que pour tout φ dans la classe de Schwartz, on a

$$\forall\, x\in\mathbb{R}^d\,,\quad \mathrm{Op}(a)\,\varphi\,(x)=\sum_i\ \mathrm{Op}(a_i)\,\varphi\,(x)\,.$$

Pour alléger les écritures, nous noterons T_i l'opérateur

$$T_i\,\varphi\,(x):=\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\cdot\xi}\,a_i(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi\,.$$

Comme a_i est à support compact en x, il est clair que T_i se prolonge de manière unique en un opérateur linéaire continu sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Il nous faut désormais estimer $\|T_j^*T_k\|$ et $\|T_jT_k^*\|$ dans $\mathcal{L}(L^2)$. Nous allons estimer la norme $\|T_j^*T_k\|$, l'estimation de $\|T_jT_k^*\|$ étant analogue. Un calcul élémentaire montre que T_j^* est l'opŕateur à noyau défini par

$$T_j^*\,\psi\,(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-ix\cdot\xi}\,\overline{a_j}(x,\xi)\,\psi(x)\,dx\,.$$

Pour tout φ dans la classe de Schwartz, on obtient donc

$$T_j^*T_k\,\varphi\,(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}G_{j,k}(\xi,\eta)\,\varphi(\eta)\,d\eta\quad\text{où}\quad G_{j,k}(\xi,\eta):=\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\cdot(\eta-\xi)}\,\overline{a_j(x,\xi)}\,a_k(x,\eta)\,dx\,.$$

La norme de l'opérateur $T_j^*T_k$ est difficilement calculable. En revanche, cet opérateur étant défini par un noyau, l'inégalité de Cauchy-Schwarz conduit à

$$\|T_j^*T_k\|^2\le\left[\sup_\xi\int_{\mathbb{R}^d}|G_{j,k}(\xi,\eta)|\,d\eta\right]\left[\sup_\eta\int_{\mathbb{R}^d}|G_{j,k}(\xi,\eta)|\,d\xi\right]\,.$$

Nous allons donc étudier précisément le noyau $G_{j,k}$. On rappelle que

$$G_{j,k}(\xi,\eta)=\chi(\xi-j_2)\chi(\eta-k_2)\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\cdot(\eta-\xi)}\,\overline{a}(x,\xi)\,a(x,\eta)\,\chi(x-j_1)\,\chi(x-k_1)\,dx\,.$$

D'après les propriétés de support de χ, on trouve que $G_{j,k}\equiv 0$ si $|j_1-k_1|\ge 2$. On suppose donc $|j_1-k_1|<2$. Par intégrations par parties successives, on obtient

$$G_{j,k}(\xi,\eta)=\frac{\chi(\xi-j_2)\chi(\eta-k_2)}{(1+|\xi-\eta|^2)^N}\int_{\mathbb{R}^d}e^{ix\cdot(\eta-\xi)}\,(1-\Delta_x)^N[\overline{a}(x,\xi)\,a(x,\eta)\,\chi(x-j_1)\,\chi(x-k_1)]\,dx\,.$$

En utilisant les bornes vérifiées par a, on montre qu'il existe une constante $C_N(a)$ telle que

$$\forall\,\xi,\eta\in\mathbb{R}^d\,,\quad |G_{j,k}(\xi,\eta)|\le C_N(a)\,\frac{\chi(\xi-j_2)\chi(\eta-k_2)}{(1+|\xi-\eta|^2)^N}\,,$$

l'entier N étant à fixer par la suite. Le numérateur de la fraction ci-dessus est nul si $|\xi-\eta-(j_2-k_2)|>4$. On obtient ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^d}|G_{j,k}(\xi,\eta)|\,d\eta\le C_N(a)\,\|\chi\|_{L^\infty}\int_\Omega\frac{\chi(\eta-k_2)}{(1+|\xi-\eta|^2)^N}\,d\eta\,,$$

avec $\Omega := \{\eta \in \mathbb{R}^d \,:\, |\xi - \eta - (j_2 - k_2)| \leq 4\}$. Si $|j_2 - k_2| < 5$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |G_{j,k}(\xi,\eta)| \, d\eta \leq C_N(a) \, \|\chi\|_{L^\infty} \, \|\chi\|_{L^1} \, .$$

Si $|j_2 - k_2| > 5$, on a $\Omega \subset \{\eta \in \mathbb{R}^d \,:\, |\xi - \eta| \geq |j_2 - k_2| - 4\}$, et donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} |G_{j,k}(\xi,\eta)| \, d\eta \leq C_N(a) \, \|\chi\|_{L^\infty}^2 \int_{|\eta| \geq |j_2 - k_2| - 4} \frac{d\eta}{(1 + |\eta|^2)^N} \leq \frac{\mathrm{C^{te}} \, C_N(a)}{|j_2 - k_2|^{2N-d}} \, .$$

On obtient ainsi les majorations

$$\begin{aligned}
&\|T_j^* T_k\| \leq 0 && \text{si } |j_1 - k_1| \geq 2 \, , \\
&\|T_j^* T_k\| \leq C(a) && \text{si } |j_1 - k_1| < 2 \text{ et } |j_2 - k_2| < 5 \, , \\
&\|T_j^* T_k\| \leq \frac{C(a)}{|j_2 - k_2|^{2N-d}} && \text{si } |j_1 - k_1| < 2 \text{ et } |j_2 - k_2| \geq 5 \, .
\end{aligned}$$

On peut donc appliquer le lemme de Cotlar, pourvu que l'on choisisse N tel que $N - d/2 > d$, c'est-à-dire $N > 3d/2$. Nous avons ainsi montré qu'il existe une constante C, ne dépendant que de a telle que pour toute partie finie $I \subset \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d$, on a

$$\|\sum_{i \in I} T_i \, \varphi\|_{L^2} \leq C \, \|\varphi\|_{L^2} \, .$$

En utilisant le théorème de Plancherel, on obtient donc

$$\|\sum_{i \in I} \, \mathrm{Op}(a_i) \, \varphi\|_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \, \|\sum_{i \in I} T_i \, \widehat{\varphi}\|_{L^2} \leq C \, \frac{1}{(2\pi)^d} \|\widehat{\varphi}\|_{L^2} = C \, \|\varphi\|_{L^2} \, . \tag{3}$$

Nous allons maintenant montrer que cette borne implique la convergence dans L^2 de la série $\sum \, \mathrm{Op}(a_i)\varphi$. Comme, par ailleurs, la limite presque partout de cette série est $\mathrm{Op}(a)\varphi$, nous en déduirons que pour tout φ dans la classe de Schwartz, $\mathrm{Op}(a)\varphi$ appartient à L^2 avec de plus

$$\|\mathrm{Op}(a) \, \varphi\|_{L^2} \leq C \, \|\varphi\|_{L^2} \, .$$

Cela assure que $\mathrm{Op}(a)$ se prolonge de manière unique en un opérateur linéaire continu sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. Nous allons montrer que la relation (3) implique que la série $\sum \, \mathrm{Op}(a_i)\varphi$ est de Cauchy. Si tel n'était pas le cas, il existerait une constante $\epsilon > 0$ et une famille d'ensembles deux-à-deux disjoints I_j, $j \in \mathbb{N}$, telles que tous les ensembles I_j sont finis et

$$\forall \, j \in \mathbb{N} \, , \quad \|\sum_{i \in I_j} \, \mathrm{Op}(a_i) \, \varphi\|_{L^2} \geq \epsilon \, .$$

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on définit

$$v_k := \sum_{i \in I_k} \, \mathrm{Op}(a_i) \, \varphi \, , \quad \|v_k\|_{L^2} \geq \epsilon \, .$$

Enfin, pour toute partie finie $J \subset \mathbb{N}$, on pose

$$w_J := \sum_{k \in J} v_k \, .$$

Nous allons montrer qu'un des termes w_J ainsi construits est de norme très grande. En effet, on se donne une partie $A \subset \mathbb{N}$ finie et on calcule

$$\sum_{J \subset A} \|w_J\|_{L^2}^2 = \sum_{J \subset A} \sum_{k \in J} \|v_k\|^2 + \sum_{i,j \in J, i<j} 2 \text{ Re } \langle v_i, v_j \rangle$$

$$= \sum_{k \in A} \|v_k\|^2 \, 2^{|A|-1} + \sum_{i,j \in A, i<j} \text{Re } \langle v_i, v_j \rangle \, 2 \, 2^{|A|-2} \geq \frac{1}{2} \, 2^{|A|-1} \sum_{k \in A} \|v_k\|^2 \geq |A| \, 2^{|A|-2} \, \epsilon^2 \, .$$

On choisit $|A|$ tel que $|A|\epsilon^2/4 > M^2$ (avec M la borne obtenue dans la relation (3)). On obtient alors

$$\sum_{J \subset A} \|w_J\|_{L^2}^2 > 2^{|A|} \, M^2 \, ,$$

ce qui implique que l'un des w_J vérifie $\|w_J\|_{L^2} > M$. Ceci contredit (3) et la série est donc de Cauchy, comme annoncé.

□

Références

[1] Ronald R. Coifman, Yves Meyer. *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels.* Astérisque, Vol. 57, Paris, 1978.

[2] Elias M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.