Un théorème de Calderón-Zygmund

Jean-François Coulombel

Commençons par définir la notion d'opérateur de Calderón-Zygmund:

Définition 1. *Un opérateur T sera dit de Calderón-Zygmund si T est un opérateur (linéaire) continu de $L^2(\mathbb{R}^d;E)$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^d;F)$, avec E et F des espaces de Banach séparables réflexifs, et s'il existe une application K telle que*

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)\, f(y)\, dy\,, \tag{1}$$

et K vérifie de plus

$$K \in \mathcal{C}^1 \Big(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \setminus \{x=y\}\,;\, \mathcal{L}(E;F) \Big) \quad , \quad \|\nabla_{x,y} K(x,y)\| \leq \frac{\mathrm{C}^{\mathrm{te}}}{|x-y|^{d+1}}\,.$$

En pratique, T est souvent un opérateur de convolution, c'est-à-dire $K(x,y) = k(x-y)$ avec k régulière sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et vérifiant

$$\|\nabla k(z)\| \leq \frac{\mathrm{C}^{\mathrm{te}}}{|z|^{d+1}}\,.$$

Remarque: en général, la formule (1) ne définit pas une fonction Tf, l'intégrale n'étant pas bien définie. Il faut comprendre (1) de la façon suivante: si f est une fonction à support dans un compact M de $\mathbb{R}^d$, alors (1) est satisfaite pour presque tout $x \notin M$.

Se donner un opérateur de Calderón-Zygmund, c'est donc se donner un opérateur borné T et un noyau K associé à T. On prendra garde que le noyau K ne détermine pas en général l'opérateur T.

Le théorème de Calderón-Zygmund que nous allons montrer est le suivant:

Théorème 1. *Soit T un opérateur de Calderón-Zygmund. Alors pour tout $p \in]1,+\infty[$, T se prolonge de manière unique en un opérateur linéaire continu de $L^p(\mathbb{R}^d;E)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d;F)$.*

La preuve que nous présentons est basée sur le théorème de Marcinkiewicz. Par hypothèse, T est de type fort (2,2) et nous allons montrer que T est de type faible (1,1). Ainsi, T se prolongera (de manière unique) en un opérateur linéaire continu de L^p dans L^p pour tout $p \in]1,2[$. Un argument de dualité permettra de traiter le cas $p > 2$.

Pour simplifier les écritures, nous supposerons $E = F = \mathbb{R}$ et nous remplacerons ainsi les normes par des valeurs absolues. Nous nous fixons une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et un réel $t > 0$. Il s'agit de montrer une estimation du type

$$\Big| \{x \in \mathbb{R}^d \,:\, |Tf(x)| > t\} \Big| \leq \frac{\mathrm{C}^{\mathrm{te}}\, \|f\|_{L^1}}{t}\,,$$

où l'on a noté $|A|$ la mesure (de Lebesgue) d'un borélien A de $\mathbb{R}^d$. Nous introduisons un peu de terminologie:

Définition 2. *On appellera une partie C de $\mathbb{R}^d$ un cube dyadique d'ordre $\ell \in \mathbb{Z}$ s'il existe des entiers $k_1, \ldots, k_d \in \mathbb{Z}$ tels que*

$$C = \prod_{i=1}^{d} \Big[2^\ell \, k_i \, ; \, 2^\ell \, (k_i + 1) \Big[\; .$$

Un cube dyadique C sera dit t-lourd si

$$\frac{1}{|C|} \int_C |f(x)| \, dx \geq t \, .$$

Il est clair que les cubes dyadiques d'ordre ℓ forment une partition de $\mathbb{R}^d$. On vérifiera facilement que pour deux cubes dyadiques C_1 et C_2 (d'ordre ℓ_1 et ℓ_2), on a toujours

$$\text{soit } \; C_1 \cap C_2 = \emptyset \, , \quad \text{soit } \; C_1 \subset C_2 \, , \quad \text{soit } \; C_2 \subset C_1 \, . \tag{2}$$

On vérifiera également que les cubes t-lourds sont tous inclus dans un même compact de $\mathbb{R}^d$ (ceci résulte des propriétés de f). Nous énonçons une dernière définition:

Définition 3. *Un cube dyadique t-lourd sera dit maximal s'il n'est proprement inclus dans aucun cube dyadique t-lourd. On notera $\mathcal{M}$ l'ensemble des cubes t-lourds maximaux et $\mathcal{C}$ leur réunion.*

La propriété (2) des cubes dyadiques impose aux cubes t-lourds maximaux d'être deux-à-deux disjoints. De plus, tout cube t-lourd est contenu dans un unique cube t-lourd maximal. Une propriété utile des cubes t-lourds maximaux est la suivante: si $C \in \mathcal{M}$, on a

$$t \, |C| \leq \int_C |f(x)| \, dx \leq 2^d \, t \, |C| \, . \tag{3}$$

L'inégalité de gauche est évidente: c'est la définition d'un cube t-lourd. Pour l'inégalité de droite, on inclut C (d'ordre ℓ) dans un cube dyadique C' d'ordre $\ell + 1$ (les cubes dyadiques d'ordre $\ell + 1$ forment une partition de $\mathbb{R}^d$ et on utilise ensuite (2)). Le cube C' ne peut pas être t-lourd (cela contredirait la maximalité de C), et donc

$$\int_C |f(x)| \, dx \leq \int_{C'} |f(x)| \, dx \leq t \, |C'| \leq 2^d \, t \, |C| \, .$$

On a donc bien l'encadrement (3).

L'ingrédient principal de la preuve du théorème est une décomposition de f tenant compte des cubes t-lourds maximaux. Plus précisément, on écrit

$$f = g + \sum_{C \in \mathcal{M}} \left(f - \frac{1}{|C|} \int_C f \right) \mathbf{1}_C = g + \sum_{C \in \mathcal{M}} (f - f_C) \mathbf{1}_C \, , \tag{4}$$

ce qui revient à définir g de la manière suivante:

$$g := f \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{C}} + \sum_{C \in \mathcal{M}} \left(\frac{1}{|C|} \int_C f \right) \mathbf{1}_C = f \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{C}} + \sum_{C \in \mathcal{M}} f_C \mathbf{1}_C \, . \tag{5}$$

Les deux sommes précédentes sont bien définies car les cubes t-lourds maximaux sont deux-à-deux disjoints (ils forment de plus un ensemble dénombrable). Notons également que ces deux sommes convergent dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. En effet, on a

$$\| \sum_{C \in \mathcal{M}} \left| f - \frac{1}{|C|} \int_C f \right| \mathbf{1}_C \|_{L^2} \leq 2 \, \|f\|_{L^\infty} \, \| \sum_{C \in \mathcal{M}} \mathbf{1}_C \|_{L^2} \leq 2 \, \|f\|_{L^\infty} \, |\mathcal{C}|^{1/2} < +\infty \, .$$

La somme intervenant dans la définition de g se traite de façon similaire. En utilisant la continuité de l'opérateur T sur L^2, on obtient

$$Tf = Tg + \sum_{C\in\mathcal{M}} T\left[(f-f_C)\mathbf{1}_C\right] = Tg + \Sigma\,,$$

et on en déduit l'inégalité

$$|\{x\in\mathbb{R}^d\,:\,|Tf(x)|>t\}| \leq \underbrace{|\{x\in\mathbb{R}^d\,:\,|Tg(x)|>t/2\}|}_{A} + \underbrace{|\{x\in\mathbb{R}^d\,:\,|\Sigma|>t/2\}|}_{B}\,.$$

Estimation du terme A

Nous allons estimer g dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Remarquons tout d'abord que la relation (5) donne

$$\forall\, x\in C\in\mathcal{M}\,,\quad |g(x)| \leq \frac{1}{|C|}\int_C |f| \leq 2^d\, t$$

en utilisant (3). Si $x\in\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{C}$, alors tout cube dyadique contenant x n'est pas t-lourd. En choisissant une suite C_n de cubes dyadiques d'ordre $-n$ ($n\in\mathbb{N}$) contenant x, on obtient

$$|f(x)| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{|C_n|}\int_{C_n}|f(y)|\,dy \leq t \leq 2^d\,t\,.$$

Finalement, on obtient

$$\|g\|_{L^\infty} \leq 2^d\,t\,.$$

Toujours d'après (5), on a

$$\|g\|_{L^1} \leq \int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{C}} |f(x)|\,dx + \sum_{C\in\mathcal{M}}\int_C |f_C|\,\mathbf{1}_C(x)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{C}}|f(x)|\,dx + \sum_{C\in\mathcal{M}}\int_C |f(x)|\,dx = \|f\|_{L^1}\,.$$

L'inégalité de Chebychev donne alors

$$A \leq \frac{4}{t^2}\,\|Tg\|_{L^2} \leq \frac{\mathrm{C^{te}}}{t^2}\,\|g\|_{L^2} \leq \frac{\mathrm{C^{te}}}{t^2}\,\|g\|_{L^\infty}\,\|g\|_{L^1} \leq \frac{\mathrm{C^{te}}}{t}\,\|f\|_{L^1}\,,$$

ce qui conclut l'estimation du terme A.

Estimation du terme B

On pose $h_C := (f-f_C)\mathbf{1}_C$ et on veut estimer

$$B = |\{x\in\mathbb{R}^d\,:\,|\sum_{C\in\mathcal{M}} Th_C(x)|>t/2\}|\,.$$

L'idée principale pour cette estimation est que la fonction h_C est de moyenne nulle, supportée par C. On s'attend donc à ce que Th_C soit "gentille"loin de C. Plus précisément, pour $C\in\mathcal{M}$, on note $\widetilde{C}$ le cube de $\mathbb{R}^d$ (non dyadique) de centre le centre de C et de longueur le double de la longueur de C. On a alors

$$|\widetilde{C}| = 2^d|C| \leq \frac{2^d}{t}\int_C |f(x)|\,dx\,,$$

et donc

$$\sum_{C\in\mathcal{M}} |\widetilde{C}| \le \frac{2^d\,\|f\|_{L^1}}{t}\,.$$

On majore B de la façon suivante:

$$\begin{aligned}B &\le |\bigcup\nolimits_{C\in\mathcal{M}}\widetilde{C}| + |\{x\notin\bigcup\nolimits_{C\in\mathcal{M}}\widetilde{C}\,:\,|\sum_{C\in\mathcal{M}} Th_C(x)|>t/2\}|\\ &\le \frac{2^d\,\|f\|_{L^1}}{t} + |\{x\notin\bigcup\nolimits_{C\in\mathcal{M}}\widetilde{C}\,:\,|\sum_{C\in\mathcal{M}} Th_C(x)|>t/2\}|\,.\end{aligned}$$

On se donne maintenant $x\notin\widetilde{C}$. D'après la relation (1), on peut écrire

$$Th_C(x) = \int_C K(x{,}y)\,h_C(y)\,dy = \int_C [K(x{,}y)-K(x{,}y_C)]\,h_C(y)\,dy\,,$$

où l'on a désigné par y_C le centre du cube C. La seconde égalité vient du fait que h_C est à moyenne nulle. Le théorème des accroissements finis donne la majoration

$$|K(x{,}y)-K(x{,}y_C)| \le |y-y_C| \sup_{z\in C}|\nabla K(x{,}z)| \le \mathrm{diam}(C)\,\frac{\mathrm{C}^{\mathrm{te}}}{|x-y_C|^{d+1}}\,,$$

car $|x-z|\ge \mathrm{C}^{\mathrm{te}}\,|x-y_C|$ pour $z\in C$ (on utilise le fait que $x\notin\widetilde{C}$). On obtient alors

$$|Th_C(x)| \le \mathrm{diam}(C)\,\frac{\mathrm{C}^{\mathrm{te}}}{|x-y_C|^{d+1}}\,\int_C |h_C(y)|\,dy\,,$$

ce qui donne, après intégration

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus\widetilde{C}} |Th_C(x)|\,dx \le \mathrm{C}^{\mathrm{te}}\,\mathrm{diam}(C)\,\left(\int_C |f(y)|\,dy\right)\int_{\mathbb{R}^d\setminus\widetilde{C}} \frac{dx}{|x-y_C|^{d+1}}\,.$$

Un changement de variables en polaires permet de montrer finalement

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus\widetilde{C}} |Th_C(x)|\,dx \le \mathrm{C}^{\mathrm{te}}\,\int_C |f(y)|\,dy\,.$$

En sommant ces inégalités, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^d\setminus\cup\widetilde{C}} |\sum_{C\in\mathcal{M}} Th_C(x)|\,dx \le \mathrm{C}^{\mathrm{te}}\,\|f\|_{L^1}\,.$$

En appliquant à nouveau l'inégalité de Chebychev, on trouve la majoration

$$|\{x\notin\bigcup\nolimits_{C\in\mathcal{M}}\widetilde{C}\,:\,|\sum_{C\in\mathcal{M}} Th_C(x)|>t/2\}| \le \frac{\mathrm{C}^{\mathrm{te}}\,\|f\|_{L^1}}{t}\,,$$

ce qui permet de majorer B comme annoncé. Ceci finit de montrer que T est de type faible (1,1).

Conclusion

Comme indiqué précédemment, le théorème de Marcinkiewicz assure que T se prolonge de manière unique en un opérateur linéaire continu de L^p dans L^p pour tout $p \in]1,2[$. On se donne alors $p \in]2, +\infty[$ et $q \in]1,2[$ son exposant conjugué. L'opérateur T^* est continu de L^2 dans L^2 et la relation (1) assure que T^* admet comme noyau $G(x,y) := K(y,x)$ (on se restreint au cas d'un noyau à valeurs réelles). Autrement dit, l'opérateur adjoint T^* est un opérateur de Calderón-Zygmund et se prolonge donc de manière unique en un opérateur linéaire continu de L^q dans L^q. Cela permet de prolonger T (par dualité) de manière unique en un opérateur continu de L^p dans L^p.

□

Une jolie application du théorème 1 est le résultat suivant:

Théorème 2 (Mikhlin). *Soit $m \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ une fonction telle que pour tout multientier $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on ait*

$$|\partial^\alpha m(\xi)| \leq \mathrm{C}^{\mathrm{te}}(\alpha)\, |\xi|^{-|\alpha|}\, .$$

Alors l'opérateur T défini par

$$\forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^d)\, , \quad Tf := \mathcal{F}^{-1}\Big(m(\xi)\hat{f}(\xi)\Big)$$

se prolonge de manière unique en un opérateur continu de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Il est en effet clair que T est un opérateur linéaire continu sur L^2 (on utilise pour cela la formule de Parseval et le fait que m est bornée). Le point un peu pénible est de montrer que T admet un noyau (ce sera en l'occurence un noyau de convolution) vérifiant des bornes satisfaisantes.

De nombreuses fonctions m satisfont les hypothèses de ce théorème, par exemple:

$$m(\xi) := \frac{\xi_j}{|\xi|} \quad \text{ou bien} \quad m(\xi) := \frac{\xi_i\, \xi_j}{|\xi|^2}\, .$$

Le second exemple conduit notamment aux estimations très importantes:

$$\forall\, f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)\, , \quad \|\partial_i \partial_j\, f\|_{L^p} \leq \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \|\Delta f\|_{L^p}\, .$$