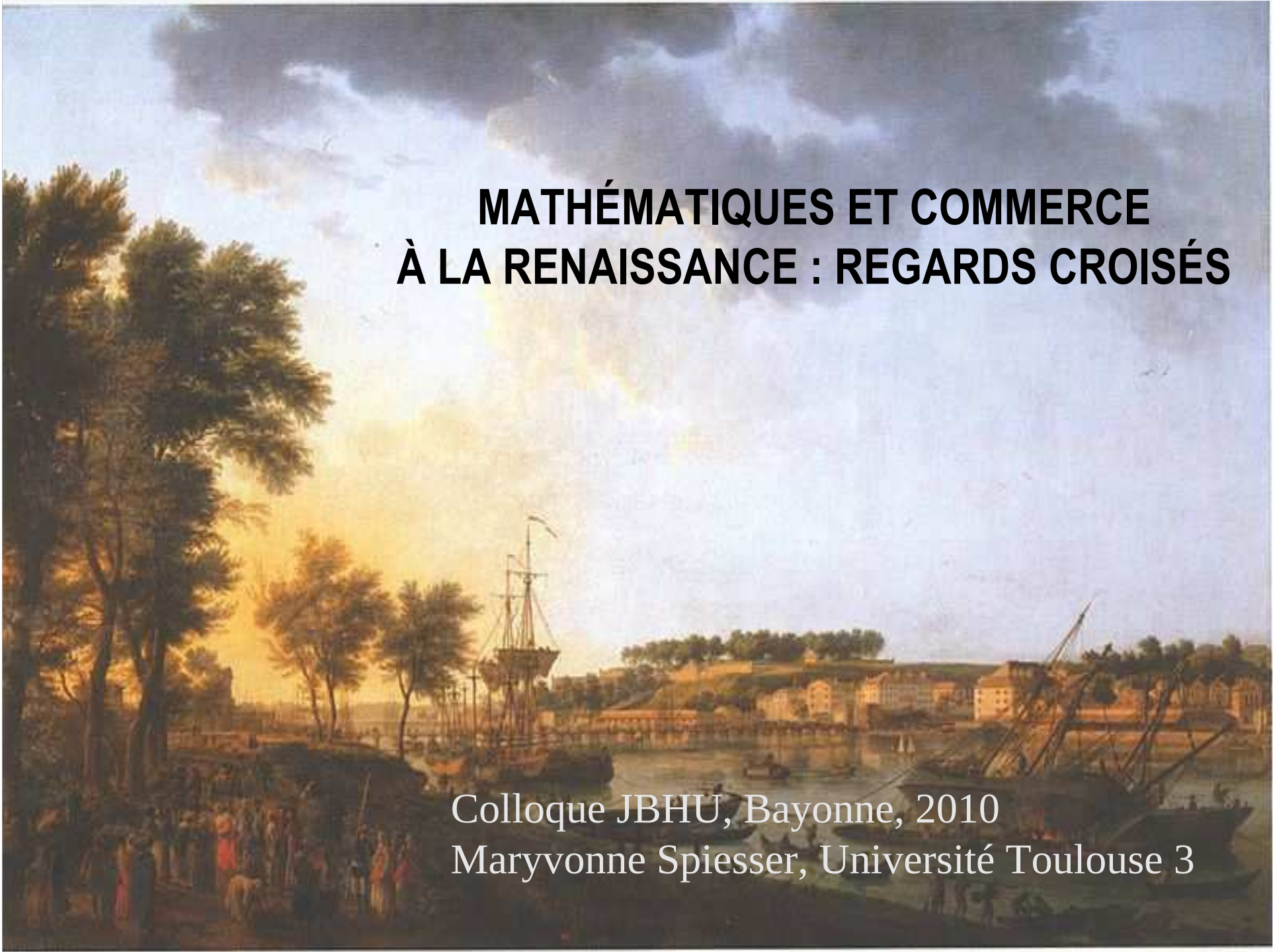




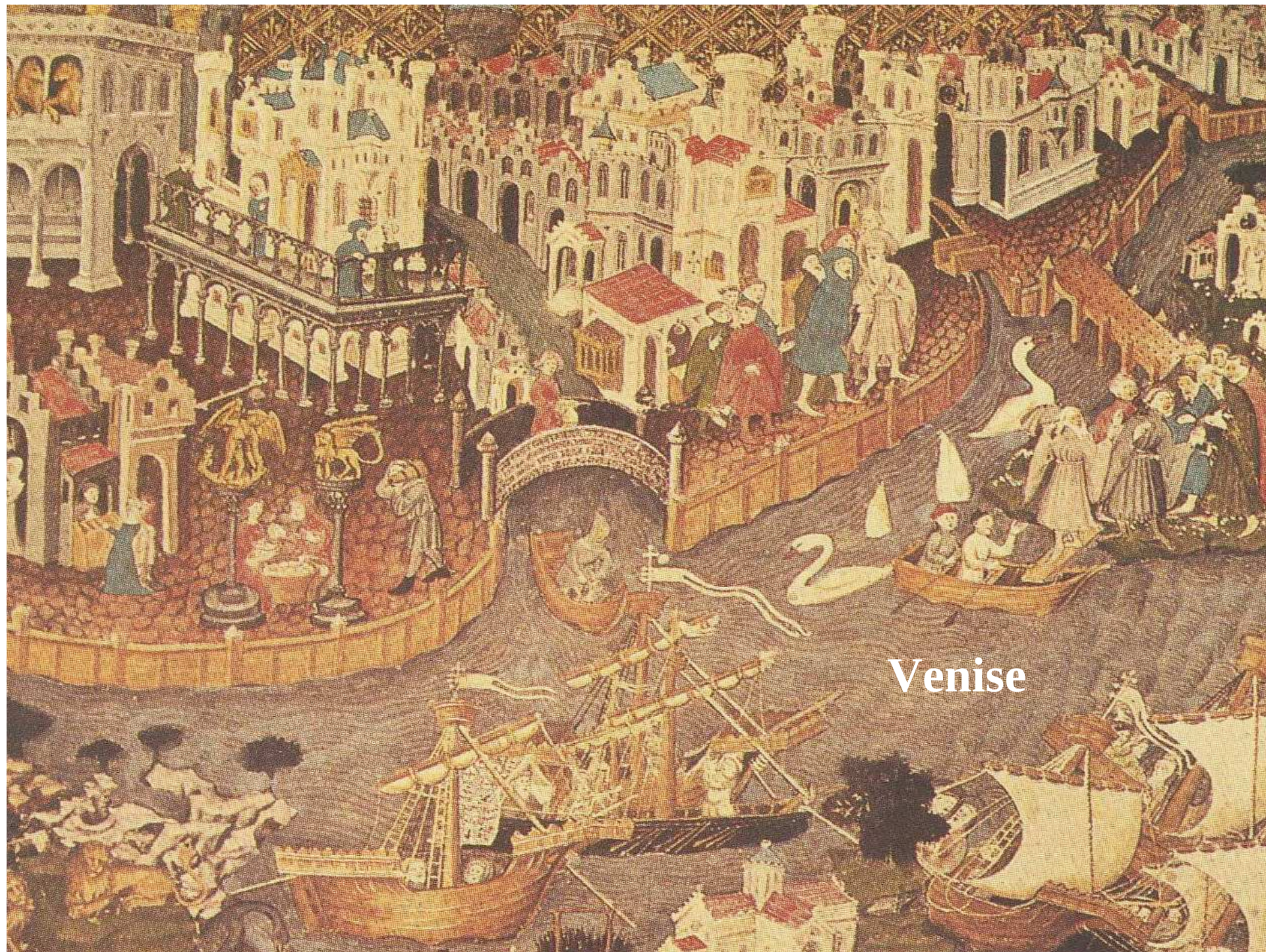
MATHÉMATIQUES ET COMMERCE À LA RENAISSANCE : REGARDS CROISÉS

Colloque JBHU, Bayonne, 2010
Maryvonne Spiesser, Université Toulouse 3

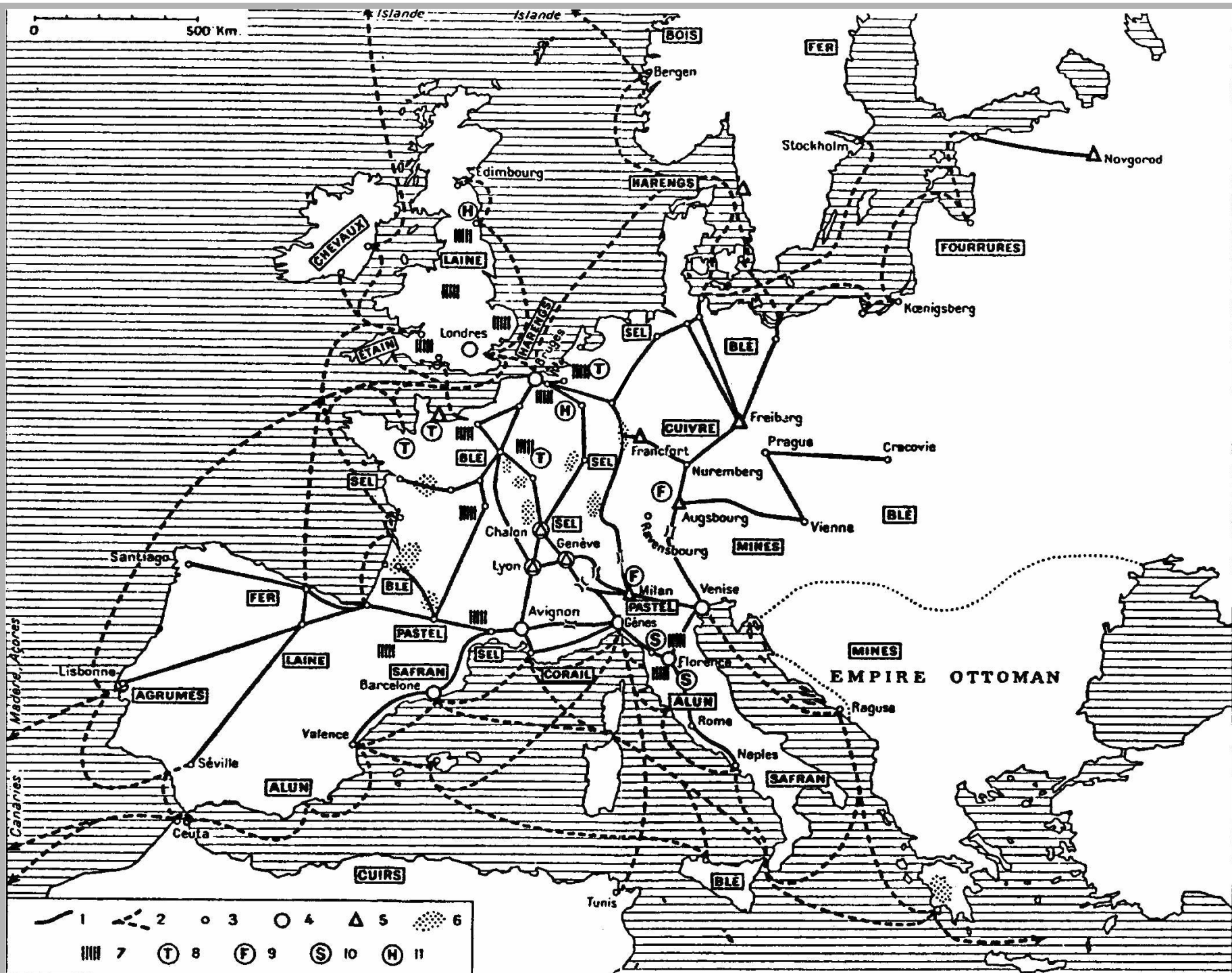
1. Paysage économique européen (XIVe-XVle s.)

2. Arithmétiques commerciales : au service des marchands ?

3. Retombées mathématiques



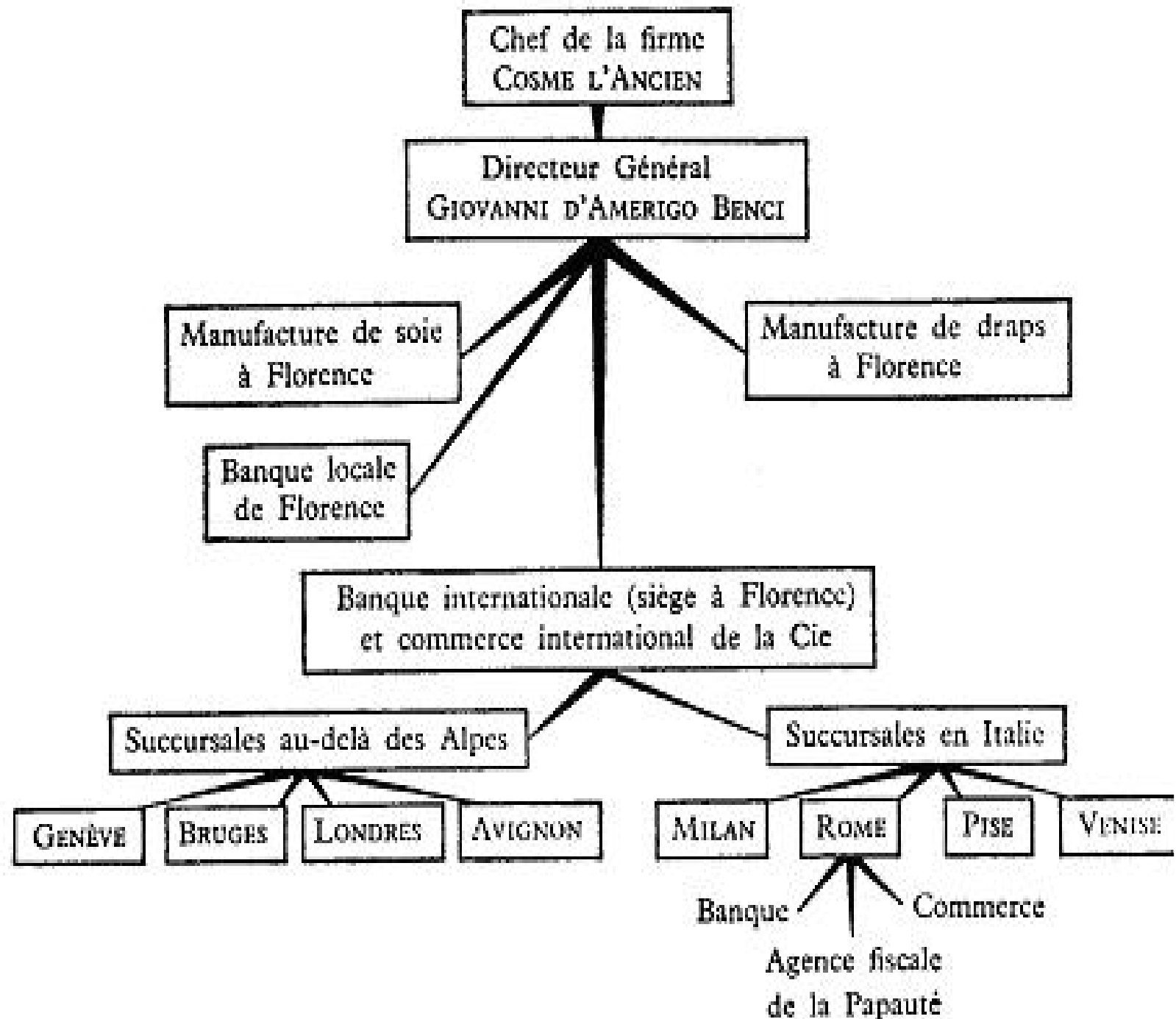
Venise



Anvers



Firme Medicis (vers 1458)



**Hôtel de Bernuy
Toulouse**



Jean Bernuy, le commerce du pastel à Toulouse (1ère moitié du XVI^e s.)

- Bernuy vend à des clients venus acheter sur place (de Burgos en particulier)
- Vers 1520, il exporte vers l'Angleterre
- Il envoie du pastel à Valence
- Il a des employés qui spéculent pour lui entre Londres, Anvers et Rouen,
 - un associé en 1543,
 - un facteur à Marseille pour l'exportation en Méditerranée,
 - un facteur à Aigues-Mortes,
 - un commis d'affaires à Paris...

École d'abaque
(Traité d'abaque de F.
Calandri, XV^e s.)



Conseil de Lucques, 4 avril 1346:

« ...un maître d'arithmétique qui enseigne aux enfants afin qu'ils soient à la fois plus fins et plus sûrs dans ce qui touche à la marchandise » (traduit du latin)

Luca Pacioli, *Summa...*, Venise, 1494:

« La seconde chose nécessaire au marchand, c'est de savoir calculer rapidement. Pour y réussir complètement, [...], nous avons donné des règles nécessaires concernant chacune des opérations, de sorte que tout lecteur appliqué pourra les apprendre seul. »

Piero
della
Francesca
Trattato
d'abaco
(vers
1480)



**Juan Ortega, *Arte de l'arismetica* (1512),
trad. fr. de Claude Platin (1514)**

« [...] Et aussi nostre mere sainte esglise [...] entre les choses qu'elle nous enseigne [...] c'est que nous sommes tous obliges de enseigner et aprendre aux ignorans la science qu'il a pleu a dieu nous enseigner. Puisque j'ay receu ce don de dieu pour extirper et deschasser ces faultes par lesquelles dieu est offencé grandement par les tromperies et deceptions qui journellement se font au simples gens qui peu ou neant entendent en comptes, et aussi qu'il ne me fut reprouché avoir mussé soubz terre cest tresor a moy donné de dieu, j'ay proposé de composer ung petit traicté de arithmeticque aultrement dit chiffre et aussi de geometrie. Non pas comme grant arithmeticien mais comme ung petit compteur entre les moindres en ladite science pour seullement monstrier ce qui est necessaire pour compter en tous comptes en fait de marchandises comme compaignies, trocques, [...] »

Un contenu standard

I. Compter et calculer

Apprendre à compter et à maîtriser les techniques opératoires sur les entiers puis sur les fractions

II. Règles de résolution de problèmes

(dont la règle de trois)

Problèmes utiles au négoce

Problèmes « récréatifs »

1. Apprendre à
compter et à calculer

$$\begin{array}{r} 11 \\ + 13 \\ + 17 \\ + 19 \\ \hline 60 \end{array}$$



Apprendre à compter

Nicolas Chuquet : *Comment la science des nombres se peult appliquer au fait de marchandise* (1484)

Ung marchant avoit une piece de drap ayant 18 aulnes 1/2 dont il a vendu 1/3 et 1/2. Assavoir moult que luy reste de son drap.

The image shows a handwritten calculation in four columns, representing the problem of finding the remainder of 18 1/2 aulnes after selling 1/3 and 1/2 of it.

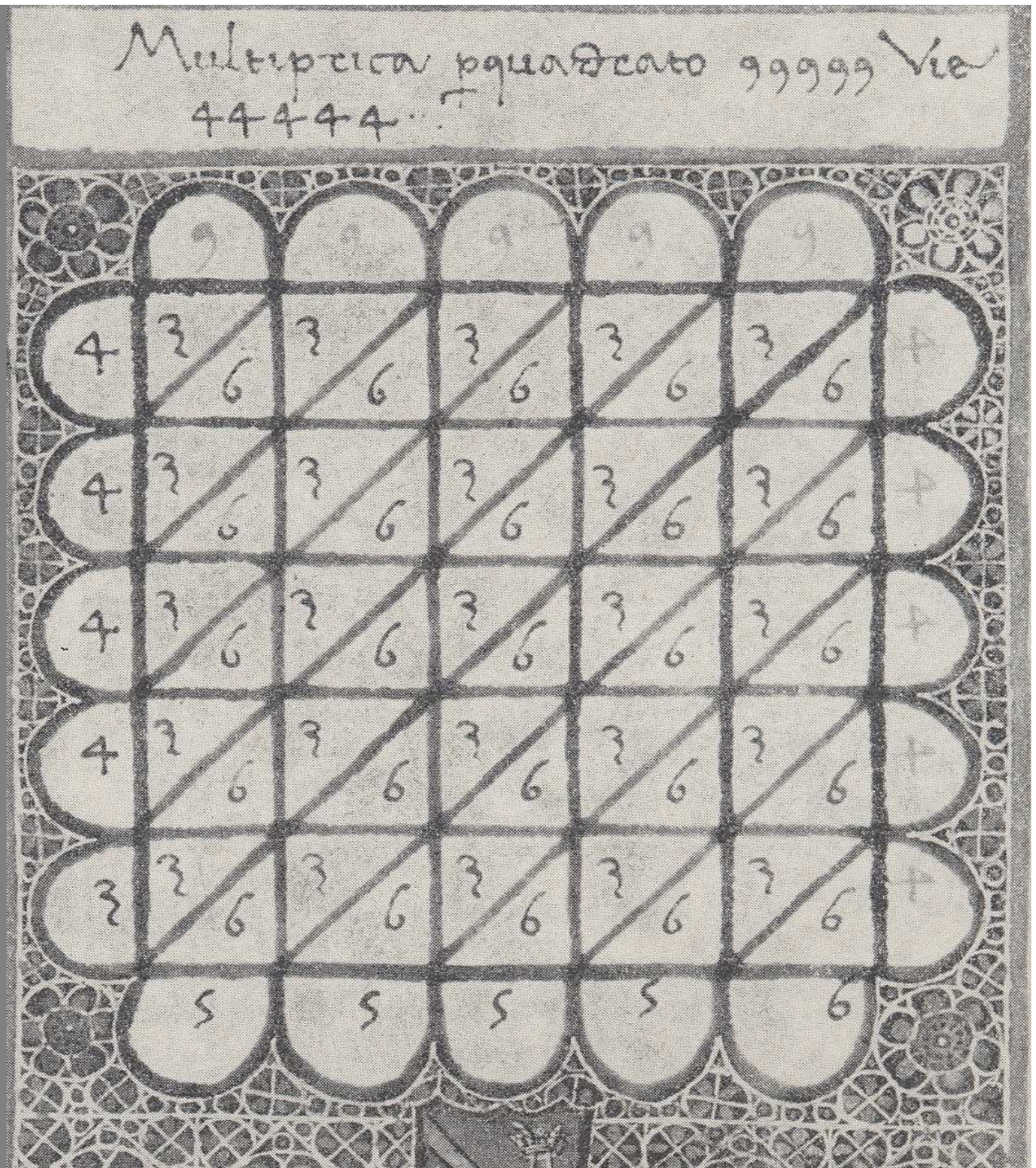
18.	$\frac{1}{2}$	3	$\frac{6}{3}$
13.	$\frac{1}{6}$	4	$\frac{2}{3}$
4.	$\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$

The calculation is performed as follows:

- Column 1: 18. minus 13. equals 4.
- Column 2: $\frac{1}{2}$ minus $\frac{1}{6}$ equals $\frac{2}{3}$.
- Column 3: 3 plus 4 equals 7.
- Column 4: $\frac{6}{3}$ minus $\frac{2}{3}$ equals $\frac{4}{3}$.

Pier Maria
Calandri

Tractato
d'abbacho
(2^e moitié du
XV^e s.)



2. Apprendre à résoudre des problèmes du négoce



Intérêts
(Arithmétique de
F. Calandri)

Règle de trois : le change

L'on doit une pension de 5 escus du temps que marc d'or valoit 64 escus. L'on demande que vault ceste pension maintenant que marc d'or vault 77 escus.

Response par la rigle de troys. Se 64 escus me donnent 5 escus de pension, que me donneront 77 ?

(Nicolas Chuquet)

64 5

77 ?

Intérêts

Tractato d'abbacho, P.M. Calandri, fin XV^e s.

Bien que le gain réalisé selon le présent chapitre soit prohibé par la loi chrétienne, néanmoins on montrera la manière <de procéder>, non pour que tu aies envie de faire une telle chose, mais afin que, si cela t'arrive, et que tu as reçu une certaine quantité d'argent, tu saches faire les comptes de manière à ne pas avoir une perte double et à ne pas donner le double de ce qui était convenu.

La règle de compagnie

modo del diuideri il
dagno nondimeno d'ora sono finiti
certi modi per li quali si tenoua quella
fianuengha aciaschano de me d'olli
exempi seguenti si manifesta d'ora
D Va fanno compagnia conque-
sti par di quello d'ciascuno
meno quello delle trarre. El primo



« Par chascune multiplie et par
toutes ensemble partiz »

Problèmes d'alliage

Francés Pellos, *Compendion de lo abaco*
Turin, 1492 (occitan)

Énoncé

Un marchand a trois sortes d'argent, à 5 onces $\frac{1}{2}$, à 6 onces $\frac{1}{2}$ et à 7 onces $\frac{3}{4}$ de loi. Il veut les mélanger pour avoir de l'argent à 6 onces $\frac{3}{4}$ et il en veut 32 marcs.

Combien de marcs doit-on prendre de chaque sorte ?

Soient P_1 , P_2 et P_3 les poids cherchés (en marcs) et $P = 32$

Soient a_1 , a_2 , a_3 les lois des trois billons et a la loi demandée :

$$P_1 + P_2 + P_3 = P \quad (1)$$

$$a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 = aP \quad (2)$$

Solution :

Entre $5\frac{1}{2}$ et $6\frac{3}{4}$ il y a $1\frac{1}{4}$

Entre $6\frac{1}{2}$ et $6\frac{3}{4}$ il y a $\frac{1}{4}$

Entre $7\frac{3}{4}$ et $6\frac{3}{4}$ il y a 1.

Tableau

1	1	$1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$5\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	$7\frac{3}{4}$	
	$6\frac{3}{4}$		

Analyse mathématique

$$P_1 + P_2 + P_3 = P \quad (1)$$

$$a_1 P_1 + a_2 P_2 + a_3 P_3 = aP \quad (2)$$

On peut choisir $P_1 = P_2$:

$$[(a - a_1) + (a - a_2)] P_1 = (a_3 - a)P_3$$

$$(1\frac{1}{2})P_1 = 1. P_3$$

$$P_1 / 1 = P_2 / 1 = P_3 / (1\frac{1}{2})$$

Trois marchands font une compagnie. Le 1^{er} met 1, le 2^e met 1, le 3^e met 1 ½. Ils gagnent 32. Quelle somme revient à chacun ?

Ajoute ensemble les trois mises, il vient 3 ½, puis dis :

Si 3 ½ valent 32, que valent 1, 1, 1 1/2 ?

Et tu trouveras pour le premier : 9m. 1/7

Pour le second : 9m. 1/7

Pour le troisième : 13m. 5/7

$$\begin{aligned} P_1 / 1 = P_2 / 1 = P_3 / (1 \frac{1}{2}) &= (P_1 + P_2 + P_3) / (3 \frac{1}{2}) \\ &= 32 / (3 \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Problème des oiseaux

(Fibonacci, *Liber abbaci*, 1202, ch. 11)

Un homme achète 30 oiseaux pour 30 deniers : des perdrix à 3d. pièce, des pigeons à 2d. pièce et des moineaux à 2 pour 1d.

Combien y a-t-il d'oiseaux de chaque sorte?

Alliage de trois billons à 3d. de loi, 2d. et $\frac{1}{2}$ d. de loi.

On veut obtenir un alliage à 1d. de loi et on veut en tout 30 livres de mélange.

toffa alla donna e gista $\frac{1}{2}$ di 70 d e dallo alla famiglia. se e 10 d e 10 d toffa
alla famiglia gora gonggona le gongg



Le testament
Arithmétique, Paolo dell' Abbaco, XIV^e s.

60 de seno 9. 5. radoppia 45. fa. 90. carne 83. retta p. 7. 20
 e lo e. 84. destina nella bursa educa. 7. ama lo p.
 P lo 2. piglia h. 4. di 60. seno 98. radoppia 48. fa. 96. pa
 ne. 85. retta p. 11. educa. 11. ama lo 2. compagne coplo 3. in
 di di seno 1. 5. di. 60. seno 98. radoppia 48. fa. 100
 carne. 86. di. 100. retta. 7. educa. 1. ama. 17. lo 3. compa
 gne. et fa bene. et così fa le simili ragione



Trois
 hommes
 ont
 trouvé
 une
 bourse

A me quella ragione. R. aomei tanto mi di spay et par di
 buon dno 1. 20. et p. di meendi meglio. Si cosa sono quelli
 mi di spay quello ore proprio anno 80. diassi le righe di con
 di ce uote. 80. hno. 24. quan coe de dno. di con. di con.

3. Retombées mathématiques ?

tout marche
 be, $\min(\mathcal{P}) = \max(\mathcal{D})$;
 le multiplicateur de Lagrange - λ
 ou $\bar{x}(\mu)$, minimiseur de $\mathcal{L}(\cdot, \mu)$
 $= \bar{\mu}$.

matrices définies positives A et

$$\min_{x_1=1} \langle Ax, x \rangle + \min_{x_1=1} \langle Bx, x \rangle.$$

met donc de dire

$$\frac{A}{A_1} + \frac{\det B}{\det B_1}.$$

comment étendu à tout

Elargissement de l'idée de nombre

*« Nombre [...] est pris icy
largement, non pas tant
seulement en tant qu'il est
collection de plusieurs
unitez mais aussi soit 1
partie ou parties de 1
comme est tout nombre
roupt »*

(N. Chuquet, 1484)

18

$\frac{2}{5}$

$126 + \frac{5}{14}$

Diffusion et évolution de l'algèbre arabe

Diffusion et évolution de l'algèbre arabe

« Quantification » du hasard

Le juste prix

B. Cotrugli : « *La fin du marchand est de gagner & de s'enrichir* »

J. Certain : « *bien savoir compter pour justement prandre et donner en vendant et achetant à chascun son loyal droit* »

B. Cotrugli : « *La marchandise est art, ou bien discipline, entre legitimes personnes justement ordonnee, es choses qui se traffiquent pour l'entretien des hommes, avec espoir de gain. »*

« *Par ce terme [justement] nous entendons parler de l'achapt ou vente qui se fait des choses a juste pris, ou a peu pres. »*

Ruptures de contrat

Exemple : Chuquet, *Triparty*

Deux marchands ont fait un contrat [pache] de compagnies en telle manière que l'un d'eux doit mettre la somme de 1200 l. sans la personne et l'autre doit mettre 800 l. et la personne, à savoir son service. Et ce faisant ils doivent partager le gain par la moitié. Or il est advenu que celui qui devait mettre 1200 l. n'en a mis que 900 et celui qui devait mettre 800 l. n'en a mis que 400 et sa personne. À savoir quelle portion du gain doit prendre chacun d'eux, les contrats d'origine n'étant pas corrompus, mais observés et gardés.

(Trad. moderne)

Ruptures de contrat Chuquet (suite)

Chuquet donne trois solutions possibles et conclut :

De ces trois manières de considérer de tels problèmes en fait de compagnie, que chacun prenne celle qui lui semble la plus juridique car selon la manière dont elles sont considérées il en ressort diverses proportions de nombres.

Blaise Pascal

*La fortune incertaine y est si bien maîtrisée par
l'équité du calcul qu'à chacun des joueurs on
assigne toujours exactement ce qui s'accorde
avec la justice*

(Adresse à l'Académie Parisienne de Science)